

## Перестановки и биномиальные коэффициенты

**Задача 1.1.** а) Сколько слов можно получить, переставляя буквы слова ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ? б) У скольких из них нет двух идущих подряд букв О?

**Задача 1.2.** Найдите сумму всех пятизначных чисел, которые можно получить, записав цифры 1,2,2,3,3 в каком-то порядке.

**Задача 1.3.** Найдите количество перестановок чисел  $1, \dots, n$  с ровно одним спуском (следующее число меньше предыдущего ровно в одном месте).

**Задача 1.4.** Чему равна размерность линейного пространства всех многочленов степени не выше  $d$  от  $n$  переменных?

**Задача 1.5.** Докажите комбинаторно

$$\text{а) } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}; \quad \text{б) } \binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}; \quad \text{в) } \sum_{k \leq n} \binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n}.$$

**Задача 1.6.** а) Чему равна знакопеременная сумма чисел в  $n$ -й строке треугольника Паскаля? Дайте комбинаторное доказательство.

б) То же для суммы квадратов, в\*) знакопеременной суммы квадратов.

**Задача 1.7.** Что получится если просуммировать числа в треугольнике Паскаля «ходом коня», т. е. найти сумму  $\sum_k \binom{n-k}{k}$ ? (Можно начать с примеров.)

**Задача 1.8.** Найдите суммы (приветствуются разные решения)

$$\text{а) } \sum_k k \binom{n}{k}; \quad \text{б) } \sum_k k^2 \binom{n}{k}; \quad \text{в*) } \sum_{k \leq n} \frac{1}{2^k} \binom{n+k}{k}.$$

**Задача 1.9.** а) Напомним, что  $x^{\downarrow n} = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$ . Каков комбинаторный смысл этого выражения? б) Докажите, что  $\sum_{x=0}^n x^{\downarrow k} = \frac{(n+1)^{\downarrow k+1}}{k+1}$ .

**Задача 1.10\*.** Сколько существует сюръективных отображений из  $n$ -элементного множества на 2-элементное множество? а) на  $(n-1)$ -элементное?

**Задача 1.11\*.** Пусть количество сюръекций  $n$  элементного множества на  $k$ -элементное есть  $k! \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ . Рассмотрим треугольник из чисел  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ . Как в нем число выражается через два стоящие над ним? Докажите.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 3 & 1 & \\ & & & 1 & 7 & 6 & 1 \\ & & & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\ & & & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \end{array}$$

**Задача 1.12\*.** Докажите, что а)  $x^n = \sum_{k \leq n} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\downarrow k}$ ; б)  $1^k + 2^k + \dots + n^k = \sum_{\ell \leq k} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ \ell \end{smallmatrix} \right\} \frac{(n+1)^{\downarrow \ell+1}}{\ell+1}$ .