Линейные рекурренты и рациональные функции

▷ В следующих задачах «найдите последовательность a_n» значит «представьте a_n в виде многочлена от n и выражений вида λ^n».

Задача 2.1. Найдите все последовательности (a_n), для которых
а) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$; б) $a_{n+1} = 5a_{n+1} - 6a_n$; в) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$;
г) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$; д) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$; е) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$;
ж) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$.

Задача 2.2. Для каждого из соотношений из пп. а)–д) предыдущей задачи найдите последовательность, удовлетворяющую этому соотношению и начальным условиям $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

Задача 2.3. Разложите в ряд (укажите явную формулу для коэффициента при q^n)
а) $\dfrac{1}{q+2}$; б) $\dfrac{2q-3}{3q-5}$; в) $\dfrac{q-3}{q^2-6q+8}$; г) $\dfrac{1}{(1-q)^2}$; д) $\dfrac{1}{(1-q)^n}$.

Задача 2.4. Для следующих последовательностей a_n найдите производящую функцию $A(q) = \sum_{n\geqslant 0} a_n q^n$ (в виде рациональной функции от q), представьте ее в виде суммы простейших дробей, найдите явную формулу для a_n.
а) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$;
б) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
в) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.

Задача 2.5. Задайте последовательность а) $a_n = n(n+1)/2$; б) $a_n = n^2$; в) $a_n = n^3$ линейной рекуррентой. Найдите ее производящую функцию (представьте ее в виде отношения двух многочленов).

Задача 2.6. а) Доопределим числа Фибоначчи F_n для отрицательных n при помощи того же соотношения: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (причем $F_0 = F_1 = 1$). Найдите F_{-10}.
б*) Последовательность a_n задана линейной рекуррентой (и некоторым начальным условием). Дооопределим ее для отрицательных n. Выразите производящую функцию для последовательности (a_{-n}) через производящую функцию для последовательности (a_n).

Задача 2.7. Докажите, что $\sum n^k q^n$ — рациональная функция от q для любого натурального k. Какой у нее знаменатель?

Задача 2.8*. Как связан числитель функции из предыдущей задачи с числами $E(n,k)$ — количествами перестановок чисел от 1 до n с ровно k *спусками* (т.е. таких перестановок σ, что $\sigma(i+1) < \sigma(i)$ ровно для k индексов i)?