Числа Каталана

▷ Напомним, что *n-е число Каталана* C_n — это количество путей Дика (путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из шагов $(1,1)$ и $(1,-1)$, и не опускающихся ниже оси абсцисс). Это же число равно количеству триангуляций выпуклого $(n+2)$-угольника.

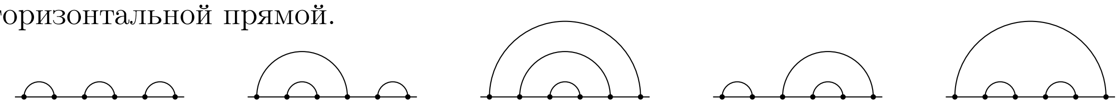
Задача 3.1. Ниже приведен ряд множеств. Требуется доказать, что количество элементов в каждом равно C_n.

Для этого есть два основных способа: построить явную биекцию или проверить рекуррентное соотношение $C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \ldots + C_nC_0$. Полезно попробовать сделать и то, и другое.

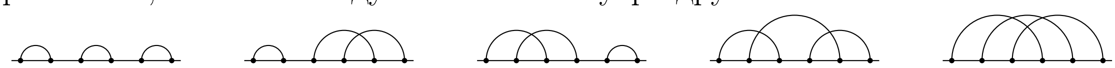
а) Корректные расстановки в ряд n пар скобок (в любом начальном фрагменте открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся).

`((()))`   `(())()`   `()(())`   `(()())`   `()()()`

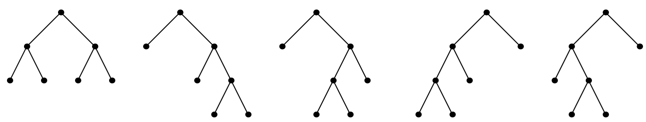
б) Наборы непересекающихся дуг в верхней полуплоскости, соединяющие $2n$ точек на горизонтальной прямой.



в) Наборы дуг в верхней полуплоскости, соединяющие $2n$ точек на горизонтальной прямой так, что никакая дуга не лежит внутри другой.



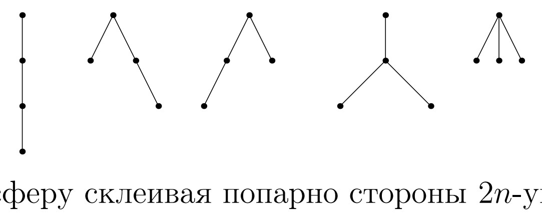
г) *Плоские корневые строго двоичные деревья* (у каждой вершины либо два потомка, либо ни одного) с n внутренними вершинами.



д) Расстановки скобок в произведении $n+1$ сомножителя, определяющие однозначно порядок умножения.

`a(b(cd))`   `(ab)(cd)`   `((ab)c)d`   `a((bc)d)`   `(a(bc))d`

е) *Плоские корневые деревья* с $n+1$ вершиной.

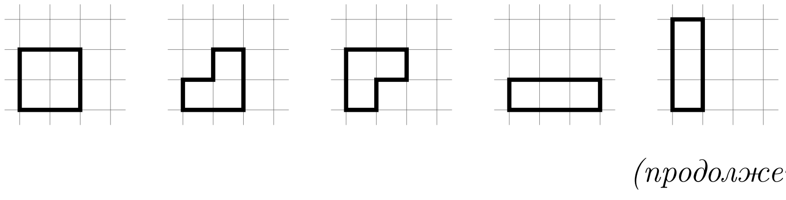


ж*) Способы получить сферу склеивая попарно стороны $2n$-угольника.

з*) Неупорядоченные наборы n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$.

`0 0 0`   `0 1 3`   `0 2 2`   `1 1 2`   `2 3 3`

и*) *Параллеломино* (пар путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$.



(продолжение на обороте)

Задача 3.2. а) Количество $c(a,b)$ *стандартных таблиц* из двух строк длины a и b (заполнений числами от 1 до $a+b$, монотонных в каждой строке и в каждом столбце) равно количеству путей типа Дика из точки $(0,0)$ в точку $(a+b, a-b)$.

```
1 2 3      1 2 4      1 3 4      1 2 5      1 3 5
4 5        3 5        2 5        3 4        2 4
```

б) Найдите линейную рекурренту и гран. условия, задающие эти числа.
в) Найдите явную формулу для этих чисел.
г*) Изучите стандартные таблицы из 3 строк.

Задача 3.3. Производящей функцией какой последовательности является ряд а) $(1-q)^{1/2}$; б) $(1-q)^{-1/2}$?

Задача 3.4. а) Найдите производящую функцию последовательности $\binom{2n}{n}$.
б) Найдите сумму $\sum\limits_{k+l=n} \binom{2k}{k}\binom{2l}{l}$.

Задача 3.5*. Пусть s_n — количество всех разбиений $(n+2)$-угольника на многоугольники непересекающимися диагоналями.
а) Докажите, что производящая функция $s(q)$ для этих чисел удовлетворяет уравнению

$$s = 1 + \frac{qs^2}{1-qs}.$$

б) Докажите, что s_n также есть количество (малых) *путей Шрёдера* (путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из шагов $(1,1)$, $(2,0)$, $(1,-1)$, не опускающихся ниже оси абсцисс и не делающих горизонтальных шагов по абсциссе).
в) Докажите, что если не накладывать последнего условия (про шаги по абсциссе), то при $n>0$ количество путей увеличится ровно в два раза.

Задача 3.6*. Пусть t_n — количество плоских корневых строго *троичных* деревьев с n внутренними вершинами. Запишите а) рекурренту; б) уравнение на производящую функцию $t(q)$ для чисел t_n.

Задача 3.7*. а) Придумайте для чисел t_n интерпретацию в духе путей Дика.
б) Найдите явную формулу для чисел t_n.