

Разбиения

Задача 4.1. Чему равен коэффициент при q^9 многочлена

а) $(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)(1+q^{16})$;

б) $(1+q^2+q^4+q^6+q^8+q^{10})(1+q^3+q^6+q^9)$?

Задача 4.2. Запишите (представьте в виде произведения) производящую функцию по n для разбиений числа n в сумму

а) слагаемых, не превосходящих 5; б) не более чем 5 слагаемых;

в) нечетных слагаемых; г) двоек, троек и не более одной пятерки;

д) различных слагаемых, не превосходящих k ; е) k различных ненулевых слагаемых.

Задача 4.3. Вычислите бесконечное произведение

$$(1+q+q^2+\dots+q^9)(1+q^{10}+q^{20}+\dots+q^{90})(1+q^{100}+\dots+q^{900})\dots$$

Задача 4.4. Найдите производящую функцию диаграмм Юнга по *периметру*.

Задача 4.5. а) Найдите (представьте в виде произведения) производящую функцию по n для самосопряженных (переходящих в себя при транспонировании) диаграмм Юнга из n клеток.

б*) Придумайте для этой функции разложение в сумму в духе следующей задачи.

Задача 4.6. а) Докажите, что $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1-q^n)} = \sum_{r \geq 0} \frac{q^r}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)}$;

б) Докажите, что $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1-q^n)} = \sum_{r \geq 0} \frac{q^{r^2}}{[(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)]^2}$;

в) Докажите, что $\prod_{n \geq 1} (1+q^n) = \sum_{r \geq 0} \frac{q^{r(r+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)}$.

Задача 4.7. Покажите, что тождество Роджерса–Рамануджана

$$\prod \frac{1}{(1-q^{5k+1})(1-q^{5k+4})} = \sum \frac{q^{r^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)}$$

эквивалентно тому, что количество разбиений числа n на слагаемые, дающие остаток ± 1 по модулю 5, равно количеству разбиений числа n на слагаемые, любые два из которых отличаются хотя бы на 2.