q-бином

▷ Напомним, что $[n] = 1 + q^2 + \ldots + q^{n-1}$, $[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdot \ldots \cdot [1]$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{[n]!}{[k]! \cdot [n-k]!}$.

Задача 5.1. а) Докажите, что $[n]!$ — производящая функция перестановок чисел от 1 до n по числу беспорядков.
б) Докажите, что $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$ — производящая функция перестановок k единиц и $n-k$ двоек по числу беспорядков. в) Обобщите на случай большего числа символов.

Задача 5.2*. Выразите через $[n]!$ количество обратимых линейных операторов на n-мерном пространстве над полем из q элементов.

Задача 5.3. Чему равен предел (в смысле формальных рядов) $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$?

Задача 5.4. На лекции объяснялось, что

$$(1+qx)(1+q^2x)\ldots(1+q^nx) = \sum_k q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Докажите еще одну версию q-бинома:

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^nx)} = \sum_k \begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix} x^k.$$

Задача 5.5. Докажите q-аналоги утверждений задачи 1.5:
а) $(q^k-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (q^n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-k \\ m-k \end{bmatrix}$.

Задача 5.6. Как известно, $\sum (-1)^k \dbinom{n}{k} = 0$. Докажите, что $\sum\limits_k (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$.

▷ Вычислить сумму $\sum\limits_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ заметно сложнее. Мораль: хороший q-аналог не всегда легко угадать.

Задача 5.7. Докажите, что
а) $\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix} + \ldots + q^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum\limits_{i+j=k} q^{(n-i)j} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$.

Задача 5.8. Докажите, что

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)(x-q)\ldots(x-q^{k-1}).$$

(Указание: сколько существует линейных отображений из n-мерного векторного пространства в x-*элементное*? Тж. ср. с задачей 1.12.)