Другое доказательство пентагональной теоремы

▷ Рассмотрим бесконечное произведение

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + xq^k)(1 + x^{-1}q^{k-1}).$$

Его можно рассматривать как *ряд Лорана* по x:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q)x^n,$$

коэффициенты которого $a_n(q)$ суть формальные степенные ряды от q.

Задача 5а.1. Проверьте, что $f(xq) = x^{-1}q^{-1}f(x)$.

Задача 5а.2. Докажите, что при $n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства:
а) $a_n(q)q^{n+1} = a_{n+1}(q)$; б) $f(x) = a_0(q)\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2}x^n$.

Задача 5а.3. Пусть b_m есть число способов представить число m в виде суммы нескольких различных элементов множества $\{1, 2, 3, \dots\}$ и такого же числа различных элементов множества $\{0, 1, 2, \dots\}$. Покажите, что $a_0(q) = \sum_{m\geq 0} b_m q^m$.

Задача 5а.4. Докажите, что b_m равно $p(m)$, т.е. числу разбиений числа m.
Указание. Постройте биекцию между представлениями из предыдущей задачи и диаграммами Юнга.

Задача 5а.5 (тождество Якоби для тройного произведения). Выведите из предыдущих задач равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + xq^n)(1 + x^{-1}q^{n-1})(1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m(m+1)/2}x^m.$$

Задача 5а.6 (пентагональная теорема Эйлера). Используя тождество Якоби, докажите, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m(3m-1)/2}.$$