

Перечисление деревьев

Задача 6.1. Сколько существует бамбуков (деревьев, у которых каждая вершина имеет степень 1 или 2) на n пронумерованных вершинах?

Задача 6.2. У каких деревьев все символы кода Прюфера различны?

Задача 6.3. Сколько существует деревьев на n пронумерованных вершинах, в которых первая вершина имеет степень k ?

Задача 6.4. Пусть $F_{n,k}$ — количество лесов на n вершинах из k корневых деревьев. Докажите биективно, что $knF_{n,k+1} = (n-k)F_{n,k}$. Выведите отсюда формулу для $F_{n,k}$.

Задача 6.5. а) Сколько остовных деревьев у полного двудольного графа $K_{n,2}$?
б*) То же для $K_{n,m}$.

▷ Напомним, что *экспоненциальная производящая функция* последовательности a_n — это формальный ряд $a(t) = \sum a_n t^n / n!$.

Задача 6.6. Пусть $T(t)$ — экспоненциальная производящая функция для корневых деревьев на n пронумерованных вершинах. Докажите, что она удовлетворяет уравнению $T = t \cdot \exp(T)$.