Суммы степеней и числа Бернулли

▷ Положим $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$.

Задача 7.1. Докажите, что S_k — многочлен степени $k+1$. Чему, кстати, равен его старший коэффициент?

Задача 7.2. Чему равен коэффициент многочлена S_k при а) x^k; б) x^{k-1}; в) x^{k-2}; г) x^{k-3}?

Задача 7.3. а) Пусть $(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n)$, $(\Sigma f)(n) = f(0) + f(1) + \ldots f(n-1)$. Тогда $\Delta\Sigma = \mathrm{Id}$, а также $\Sigma\Delta g = g - g(0)$.

б) На пространстве многочленов $\Delta = \exp(d/dx) - 1$.

в) Если F — первообразная многочлена f, то $f = \Delta\,\mathrm{td}\left(\dfrac{d}{dx}\right)F$, где $\mathrm{td}(t) = \dfrac{t}{\exp(t)-1}$.

г) $f(0) + \ldots + f(n-1) = \mathrm{td}({}^{d}\!/\!{}_{dx})F\big|_0^n$.

▷ Определение чисел Бернулли состоит в том, что

$$\sum B_m \frac{t^m}{m!} = \frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \ldots\,;$$

т. е. формула из предыдщей задачи состоит в том, что

$$f(0) + \ldots + f(n-1) = \int_0^n f(x)\,dx + B_1(f(n) - f(0)) + B_2\frac{f'(n) - f'(0)}{2} + \ldots.$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

Задача 7.4. Выразите коэффициенты разложения в ряд тангенса через числа Бернулли (совет: $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}(2x)$).

$$\mathrm{tg}\,x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

Задача 7.5. Докажите, что все производные тангенса в нуле (т. е. коэффициенты при x^k после умножения на $k!$) — целые числа.

Задача 7.6. Будем называть перестановку σ змеей, если $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \ldots \lessgtr \sigma(n)$. Пусть E_n — количество змей длины n.

(Например, $E_3 = |\{132, 231\}| = 2$, $E_4 = |\{1324, 1423, 2314, 2413, 3412\}| = 5$.)

а) Докажите комбинаторно, что $2E_{n+1} = \sum \binom{n}{k} E_k E_{n-k}$.

б) Докажите, что $\sum E_m x^m/m! = (1 + \sin x)/\cos x$ и $\sum E_{2n+1}x^{2n+1}/(2n+1)! = \mathrm{tg}\,x$.

Задача 7.7*. Напомним, что $E(n,k)$ — количество перестановок чисел от 1 до n с ровно k спусками. Докажите, что E_n — знакопеременная сумма чисел $E(n,k)$.

▷ Как обсуждалось в задаче 2.7, $\sum_k (-1)^{k-1}k^n q^k$ — рациональная функция от q. Эйлер *определил* значение [аналитического продолжения] функции $\eta(s) = \sum_k (-1)^{k-1}k^{-s}$ в точке $s = -n$ как значение этой рациональной функции при $q = 1$. Вместе с равенством $\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})^{-1}\eta(s)$ (очевидным при $s > 1$) это дает рецепт вычисления ζ-функции в целых отрицательных точках.

Задача 7.8*. Выведите из предыдущей задачи (и задачи 2.8), что

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1}.$$