Результант и дискриминант

Задача 8.1. Докажите, что $Res(f, gh) = Res(f, g)Res(f, h)$.

Задача 8.2. Вычислите результант многочленов:
а) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$;
б) $3x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $2x^3 + x^2 - x - 1$.

Задача 8.3. Найдите все значения λ, при которых имеют общий корень многочлены:
а) $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^3 + \lambda x + 2$;
б) $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3 x$ и $x^2 + \lambda^2 - 2$.

Задача 8.4. Исключите x из системы уравнений:
а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0; \\ x^2 + x - y^2 = 1. \end{cases}$

Задача 8.5. а) Докажите, что $D[(x - a)f(x)] = D[f(x)] \cdot f(a)^2$.
б) Пусть f и g — неприводимые многочлены. Докажите, что $D(fg) = D(f)D(g)[Res(f, g)]^2$.

Задача 8.6. Вычислите дискриминант многочленов:
а) $ax^2 + bx + c$;
б) $x^3 + px + q$;
в) $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$;
г) $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$;
д) $x^n + a$;
е) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Задача 8.7. Найдите все значения λ, при которых имеют кратный корень многочлены:
а) $x^3 - 3x + \lambda$;
б) $x^4 - 4x + \lambda$;
в) $x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2$.

Задача 8.8*. Вычислите дискриминант:
а) многочленов Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$;
б) многочленов Лагерра $L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$;
в) многочленов Чебышёва $P_n(x) = 2\cos(n \arccos(x/2))$.