

1. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКЗАМЕНА ПО АЛГЕБРЕ (СОВБАК ВШЭ-ЦПМ, ОСЕНЬ 2022 Г., ЛЕКТОР — Е.Ю.СМИРНОВ)

На экзамене 26 декабря сдающим будет предложен билет с двумя теоретическими вопросами из списка и одной задачей (список задач заранее неизвестен). Время на подготовку — 45 минут, пользоваться при подготовке ничем нельзя. Утверждения (теоремы и др.) из билета следует приводить с доказательствами, если обратное не указано явно.

Каждый вопрос и задача оцениваются из 4 баллов. Экзаменатор вправе задавать дополнительные вопросы, в т.ч. относящиеся к другим билетам; за ответы на дополнительные вопросы можно получить от  $-2$  до  $+2$  баллов к итоговой оценке. Оценка за экзамен — это сумма оценок за три вопроса в билете и за дополнительные вопросы минус один (или 10, если эта сумма больше 10).

2. СПИСОК ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ ПО АЛГЕБРЕ 26 ДЕКАБРЯ 2022 Г.

- (1) Алгоритм Евклида в  $\mathbb{Z}$  и  $K[x]$ . Линейное выражение НОД. Решение линейных дифферентных уравнений.
- (2) Основная теорема арифметики в  $\mathbb{Z}$  и  $K[x]$ .
- (3) Кольцо вычетов  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , его свойства. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона.
- (4) Кольца, идеалы. Кольца главных идеалов, евклидовы кольца: определение, основные свойства.
- (5) Факторкольца: определение, примеры. Гомоморфизмы колец. Теорема о гомоморфизме.
- (6) Многочлены над  $\mathbb{Z}$ , лемма Гаусса о многочленах с целочисленными коэффициентами, факториальность  $\mathbb{Z}[x]$ .
- (7) Признак Эйзенштейна неприводимости многочлена. Неприводимость циклотомического многочлена  $(x^p - 1)/(x - 1)$  при простом  $p$ .
- (8) Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах: существование.
- (9) Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах: единственность.
- (10) Определитель Вандермонда, его вычисление (любым способом).
- (11) Квадратичные вычеты. Символ Лежандра, его мультипликативность (любое доказательство). Квадратичный закон взаимности (без доказательства).
- (12) Критерий Эйлера для символов Лежандра. Лемма Гаусса. Вычисление символов Лежандра для  $-1$  и  $2$ .
- (13) Поля. Расширение полей, степень расширения. Мультипликативность степеней.
- (14) Присоединение корня неприводимого многочлена. Степень полученного расширения.
- (15) Построения циркулем и линейкой. Невозможность построения  $\sqrt[3]{2}$ .
- (16) Невозможность трисекции угла циркулем и линейкой.
- (17) Основная теорема алгебры.
- (18) Оценка числа корней вещественного многочлена с  $k$  ненулевыми коэффициентами.
- (19) Метод Штурма нахождения числа корней многочлена на отрезке.