ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ
ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2016 Г.

Валентина Кириченко

1. Геометрия

Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein Axiom, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken.

Рихард Дедекинд

1.1. **Начала.** Геометрия изучает разные модели реального мира, например, бывает евклидова геометрия (геометрия идеально ровной плоскости), сферическая геометрия (геометрия поверхности шара) и геометрия Лобачевского или гиперболическая геометрия (по названию хочется заключить, что это геометрия поверхности гиперболоида или Шуховской башни, но это не совсем так). В евклидовой геометрии, в отличие от сферической или гиперболической, выполнена теорема Пифагора.

Названа евклидова геометрия в честь древнегреческого математика Евклида (жил около 350 г. до. н. э.), изложившего основы геометрии в книге "Начала". Евклид сформулировал *постулаты* и *аксиомы*, из которых можно вывести логически все остальные геометрические утверждения. Особенно знаменитым стал пятый постулат. В более современной формулировке он гласит, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной. Напомним, что прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Пятый постулат не выполняется ни в сферической геометрии, ни в геометрии Лобачевского. В сферической геометрии вообще нет параллельных прямых (два меридиана выглядят параллельными только вблизи экватора, а на полюсах пересекаются), а в геометрии Лобачевского через точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной. Расхожая фраза "В геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются" не имеет смысла просто по определению параллельных прямых.

"Начала" Евклида были продолжены другими математиками. Кульминацией стала система аксиом немецкого математика Давида Гильберта (1862-1943), одного из наиболее влиятельных математиков XX века.

1.2. **Аксиомы Евклида–Гильберта.** В системе Гильберта аксиом евклидовой плоскости, основные и неопределяемые объекты — это точки, прямые и плоскости. Между объектами есть отношения, смысл которых раскрывается в аксиомах. Примеры отношений: лежать, между, конгруэнтный, параллельный. Аксиомы разбиты на пять групп. Мы приведём только планиметрические аксиомы (то есть, все точки и прямые будут жить в одной и той же плоскости). Полный список Гильберта содержит также стереометрические аксиомы (регламентирующие взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в трёхмерном пространстве).

I	1-3	аксиомы соединения (принадлежности)
II	1-4	аксиомы порядка (связи)
III	1-5	аксиомы конгруэнтности
IV	1	аксиома о параллельных
V	1-2	аксиомы непрерывности

Аксиомы принадлежности:

I_1 Для любых двух точек существует прямая, принадлежащая каждой из этих двух точек.

I_2 Для любых двух точек существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из этих двух точек.

I_3 На любой прямой существует по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Мы считаем синонимами выражения *прямая a принадлежит точкам A и B*, *точки A и B принадлежат (или лежат на) прямой a*, *прямая a проходит через (или соединяет) точки A и B"*, *точки A и B являются точками прямой a*. Если точка A лежит и на прямой a, и на прямой b, мы будем говорить, что *прямые a и b пересекаются в точке A*. Из аксиом принадлежности легко вывести следующее полезное утверждение: любые две прямые на плоскости либо не пересекаются, либо пересекаются в единственной точке.

1.3. Аксиомы порядка (аксиомы связи).

II_1 Если точка B прямой лежит между точками A и C той же прямой, то A, B и C — различные точки прямой, причем B лежит также и между C и A.

II_2 Для любых двух точек A и C на определяемой ими прямой существует по крайней мере одна точка B такая, что C лежит между A и B.

II_3 Среди любых трёх точек прямой, существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

II_4 Пусть A, B, C — три не лежащие на одной прямой точки и a прямая, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через точку отрезка AB, то она непременно проходит через точку отрезка AC или точку отрезка BC.

Первые три аксиомы порядка называют линейными, так как они регламентируют взаимное расположение точек на прямой. Используя эти аксиомы, определим отрезок AB как множество всех таких точек C на прямой, проходящей через A и B, что C лежит между A и B. Именно такое определение отрезка используется в аксиоме II_4. Заметим, что точки A и B или "концы отрезка" не лежат на отрезке AB согласно аксиоме II_1 (иногда такие "отрезки без концов" называют *интервалами*).

Четвёртая аксиома порядка — планиметрическая, то есть регламентирует взаимное расположение точек и прямых на плоскости. Эту аксиому ещё называют *аксиомой Паша* в честь немецкого математика Морица Паша (1843-1930). Он первым заметил, что следующий интуитивно очевидный факт планиметрии не следует из аксиом Евклида. Если прямая пересекает одну сторону треугольника, и не проходит ни через одну из вершин треугольника, то она должна пересекать ещё одну сторону треугольника. В частности, из аксиомы Паша следует, что все точки и прямые живут на одной и той же плоскости (очевидно, что в трёхмерном пространстве аксиома Паша выполняется, только если потребовать, чтобы прямая и треугольник лежали в одной плоскости).

Из аксиом порядка можно вывести ещё одно важное свойство порядка на прямой: среди трёх точек на прямой всегда существует одна, лежащая между двумя другими. Заметим, что из линейных аксиом порядка $II_1 - II_3$ это свойство не вытекает, для его доказательства нужно использовать аксиому Паша.

Интересно, что первоначально Гильберт ввёл ещё одну аксиому порядка.

Теорема 1 (Лишняя аксиома)**.** *Любые четыре точки на прямой можно обозначить буквами A, B, C, D так, чтобы точка, обозначенная буквой B, лежала как между точками A и C, так и между A и D, а точка, обозначенная буквой C, лежала как между точками B и D, так и между A и D.*

Американские математики Р.Л.Мур и Э.Г.Мур (однофамильцы, а не родственники) независимо друг от друга вывели эту аксиому из остальных аксиом порядка. Поэтому Гильберт исключил её из списка, и в последующих изданиях системы аксиом Гильберта она фигурирует уже как теорема.

Используя аксиомы порядка можно также также строго определить понятие *луча (или полупрямой)* и *полуплоскости*. После Гильберта было предложено ещё несколько эквивалентных систем аксиом. Например, система аксиом А.В.Погорелова (её следы присутствуют в российских школьных учебниках геометрии) вместо аксиомы Паша использует утверждение, что прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. В системе аксиом Гильберта этот факт является теоремой (с не самым коротким доказательством) и выводится из аксиомы Паша. Аксиомы порядка Погорелова кажутся естественней (возможно, это связано с тем, что их урезанные версии мы смутно помним со школы), но при этом в совокупности эквивалентны аксиомам порядка Гильберта. Формулируются они так.

- II'_1 Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.
- II'_2 Точка, лежащая на прямой, разбивает прямую на две полупрямые. Точки на одной полупрямой не разделяются точкой, производящей деление. Точки разных полупрямых разделяются этой точкой.
- II'_3 Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой.

Может показаться, что аксиомы порядка — ненужное усложнение, ведь и так понятно, как расположены точки на прямой, и как прямая может пересекать треугольник. Однако без аксиом порядка нам придётся полагаться не на логику, а на чертёж, что иногда приводит к заведомо неверным утверждениям. Например, можно "доказать", что все треугольники равнобедренные (см. "доказательство" в [Sh, стр. 16-17])).

1.4. **Аксиомы конгруэнтности.** Отношение конгруэнтности будет обозначаться символом $\equiv$. Согласно Гильберту, *углом* мы называем фигуру, состоящую из двух лучей с общим началом.

- III_1 На данной прямой от данной точки по данную сторону от неё можно отложить отрезок, конгруэнтный данному.
- III_2 Два отрезка, конгруэнтные третьему, конгруэнтны друг другу.
- III_3 Пусть AB и BC — два отрезка прямой, не имеющие общих точек, а $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка второй (или той же самой) прямой, также не имеющие общих точек. Если $AB \equiv A'B'$ и $BC = B'C'$, то отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'C'$
- III_4 От данного луча в данную полуплоскость можно отложить единственный угол равный данному.
- III_5 Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то имеет место также конгруэнтность $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Аксиомы конгруэнтности отражают интуитивное представление о равенстве фигур, по-разному расположенных на плоскости, но совпадающих при наложении. Заметим, что в аксиоме III_1 не требуется единственность отрезка, потому что она следует из единственности угла в аксиоме III_4. Первые три аксиомы конгруэнтности — линейные, и в совокупности позволяют определить отношение эквивалентности на отрезках, называемое конгруэнтностью и обладающее следующими свойствами. Если зафиксировать эталонный луч с концом в некоторой точке O, то в каждом классе эквивалентности отрезков можно выбрать единственного представителя OA, лежащего на этом луче. Таким образом, множество классов эквивалентности отрезков можно отождествить с эталонным лучём, сопоставив каждой точке A на луче класс эквивалентности $[OA]$ отрезков, конгруэнтных отрезку OA. Можно сравнивать классы эквивалентности отрезков: скажем, что $[OA]$ меньше, чем $[OB]$, если точка B на эталонном луче лежит между точками O и A. Кроме того, можно определить сложение отрезков, которое переносится на классы эквивалентности по аксиоме III_3. Тем самым, на эталонном луче можно складывать точки. Когда мы добавим четвёртую и пятую группы аксиом, эталонный луч превратится в вещественную полупрямую $(0,\infty)$.

Заметим, что для сравнения и сложения отрезков вовсе не нужно определять длины отрезков, то есть, сопоставлять каждому отрезку положительное вещественное число. Наоборот, вещественные числа можно определить с помощью исчисления отрезков. Именно по этому пути шёл Евклид, тогда как действительные числа во всей полноте были построены только в XIX веке выдающимся немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831-1916). В частности, школьный курс геометрии совсем не обязательно строить на понятии числа, можно учить геометрии согласно Евклиду. О преимуществах такого подхода пишут математики Робин Хартсхорн [Ha] (автор одного из самых известных учебников по алгебраической геометрии) и Александр Шень [Sh, стр.18–21]) (автор популярных книг по математике и программированию).

Поскольку числа у математиков Древней Греции были только целые, они не могли мерять с их помощью дробные и тем более иррациональные длины отрезков, естественно возникающие в геометрии (возьмите, например, половину единичного отрезка или диагональ единичного квадрата). Поэтому Евклид, говоря об отрезках и углах, употребляет понятие “величина”, а не “число”. Это похоже на физику, где встречаются величины разных размерностей, причём величины одной размерности можно сравнивать и складывать. Например, ускорение свободного падения g — это величина. Величине можно поставить в соответствие число, если договориться о единицах измерения (например, $g = 9.8$м/с^2), но число будет зависеть от выбора единицы измерения, тогда как величина сама по себе от этого выбора не зависит.

Заметим, что не так уж и просто сопоставить углу число, измеряющее его величину, так чтобы в дальнейшем можно было корректно определить синусы углов (см. [Sh, стр.3-9]). Именно поэтому вопрос “Что такое угол?” на устном вступительном экзамене на мехмат МГУ традиционно считался вопросом, который экзаменатор использует, чтобы завалить неугодного абитуриента. Отмахнуться от синусов под предлогом того, что они якобы не нужны нигде, кроме школьной тригонометрии и другой непонятной математики, не удастся. Синусы и косинусы естественно возникают при работе с полезными физическими процессами (такими как колебания маятника или переменный ток). В процессах, где зависимость физической величины

$x(t)$ от времени t описывается тригонометрической функцией, естественно рассматривать любые значения аргумента, в том числе большие, чем π или 2π. Например, отклонение маятника от вертикали определяется функцией $x(t) = \theta\cos(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t)$, где ℓ — длина маятника, а θ — максимальное отклонение. Поэтому придётся каким-то образом работать с "углами", большими, чем развёрнутый угол, хотя в определении угла по Гильберту (см. выше) таких углов не бывает.

С помощью аксиом конгруэнтности можно доказать Pons Asinorum (от латинского "Ослиный мост"), очень простую теорему из "Начал", названную так то ли из-за похожего на мост чертежа в доказательстве, то ли из-за того, что способность понять её доказательство отличает умного от тупого.

Теорема 2 (Pons Asinorum). *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны (точнее говоря, конгруэнтны).*

Из аксиом конгруэнтности также следуют все три признака равенства (конгруэнтности) треугольников, конгруэнтность вертикальных углов, существование прямого угла (то есть, угла конгруэнтного своему смежному) и существование середины отрезка. Можно вывести и четвёртый постулат Евклида (то есть, в системе аксиом Гильберта этот постулат становится теоремой). "При помощи сравнения углов получается доказательство следующей простой теоремы, которую Евклид — по моему мнению, неправильно — отнёс к аксиомам." (Гильберт)

Теорема 3 (Четвёртый постулат Евклида). *Все прямые углы конгруэнтны между собой.*

1.5. **Аксиома о параллельных.**

IV_1 Через данную точку, не лежащую на данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Аксиома о параллельных эквивалентна пятому постулату Евклида. Гильберт использовал более простую формулировку, принадлежащую древнегреческому математику Проклу (в англоязычной литературе эта формулировка больше известна под именем аксиомы Плейфера, по имени шотландского математика Джона Плейфера, автора популярного учебника геометрии). Оригинальная формулировка Евклида следующая.

Теорема 4 (Пятый постулат Евклида). *И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.*

Много сотен лет математики пытались вывести пятый постулат из остальных аксиом Евклида, уж очень запутанным он казался для аксиомы. Однако все попытки лишь сводили пятый постулат к более простым по форме, но эквивалентным по смыслу утверждениям, таким как аксиома Прокла. Например, известный французский математик Адриен Мари Лежандр (1752-1833) свёл пятый постулат к следующему "самоочевидному" утверждению. Любая прямая, проходящая через точку внутри данного угла, обязательно пересечёт одну из сторон угла. Интересно, что из этого утверждения можно вывести пятый постулат, пользуясь только аксиомами $I - III$.

Из аксиом конгруэнтности можно вывести, что всегда существует хотя бы одна прямая, проходящяя через данную точку и параллельная данной прямой. В сочетании с аксиомой IV_1 это позволяет точно вычислить число всех таких прямых.

Теорема 5 (Евклидова геометрия)**.** *Через данную точку, не лежащую на данной прямой можно провести ровно одну прямую, параллельную данной.*

Если же аксиома о параллельных не выполняется, то через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной. В XIX веке с появлением геометрии Лобачевского и её моделей удалось строго доказать, что пятый постулат не следует из остальных аксиом. Можно построить *неевклидовы* геометрии, то есть геометрии, удовлетворяющие аксиомам Гильберта первых трёх групп и пятой группы, но не удовлетворяющие аксиоме IV_1. В неевклидовой геометрии справедливы на первый взгляд невероятные утверждения.

Теорема 6 (Неевклидова геометрия)**.** *На стороне любого острого угла можно выбрать точку так, чтобы восставленный в ней перепендикуляр был параллелен другой стороне угла.*

Одну из моделей неевклидовой геометрии (модель Клейна геометрии Лобаческого) можно получить из половины двуполостного гиперболоида. Спроецировав гиперболоид на подходящую плоскость, мы получим, что плоскость Лобачевского — это часть евклидовой плоскости, лежащая строго внутри некоторой окружности (называемой *абсолютом*), прямые — это хорды абсолюта, а точки — это точки внутри абсолюта. В такой модели аксиома о параллельных очевидным образом нарушена, зато все остальные аксиомы выполняются (это уже не очевидно, но может быть строго обосновано).

1.6. Аксиомы непрерывности.

- V_1 Для любых двух отрезков AB и CD на прямой AB существует конечное число точек $A_1,\dots,A_n$, таких что отрезки AA_1, $A_1A_2,\dots,A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD, и при этом точка B лежит между точками A и A_n.
- V_2 Точки прямой нельзя дополнить новыми точками, так чтобы продолжали выполняться аксиомы I_{1-2}, II, III_1, V_1.

Первая аксиома непрерывности называется *аксиомой Архимеда*, а вторая — *аксиомой полноты*. Аксиомы непрерывности позволяют отождествить геометрическую прямую (то есть, неопределяемый объект, удовлетворяющий всем аксиомам Гильберта) с вещественной прямой (точками которой являются вещественные числа). Вещественные числа тоже можно определять аксиоматически, и тогда без аксиомы Архимеда и аксиомы полноты не обойтись. Например, без этих аксиом невозможно доказать, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\ldots=2.$$

Вспомним школьный приём, который “доказывает” это тождество: обозначим левую часть через x, тогда $\frac{x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=x-1$, следовательно $x=2$. Вроде бы, аксиома Архимеда ни при чём. Но точно таким же приёмом можно доказать и явно неверное тождество.

$$1+2+2^2+2^3+\ldots=-1.$$

Действительно, обозначим левую часть через x, тогда $2x=2+2^2+2^3+\ldots=x-1$, следовательно $x=-1$.

Отсутствие дырок на прямой, то есть её *непрерывность*, не очевидно и не следует из других аксиом, так же как и аксиома о параллельных на плоскости. Не зря Дедекинд называет аксиому полноты аксиомой, “с помощью которой мы *вдумываем* непрерывность в прямую”.

В учебниках геометрии аксиому Архимеда явно или неявно используют для доказательства одной из самых важных теорем планиметрии — теоремы о пропорциональных отрезках. Она утверждает, что параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки. Само утверждение кажется простым, но доказательство довольно громоздко (см. [Sh, стр. 26-27]). Гильберт придумал доказательство, не использующее аксиому Архимеда, то есть вывел теорему о пропорциональных отрезках из аксиом $I-IV$. Это замечательное достижение упрощает геометрию над неархимедовыми полями, но не позволяет упростить школьные учебники. Чем меньше аксиом использует доказательство, тем оно, как правило, сложнее.

С помощью теоремы о пропорциональных отрезках можно определить умножение и деление на классах конгруэнтности отрезков, так чтобы умножение было коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно (относительно определённого выше сложения отрезков). Например, чтобы умножить отрезок AB на отрезок CD нужно зафиксировать угол (обозначим через O его вершину) и эталонный “единичный” отрезок (обозначим его через OI) на стороне этого угла. На этой же стороне угла отложим от точки O отрезок OX, конгруэнтный AB, а на второй стороне угла отложим отрезок OY, конгруэнтный CD. Проведём через точку X прямую, параллельную IY. Она пересечёт вторую сторону угла в точке Z. Положим $[AB]\cdot[CD]=[OZ]$.

Теорема 7 (Исчисление отрезков)**.** *Классы конгруэнтности отрезков с операциями сложения и умножения можно отождествить с положительными вещественными числами.*

1.7. **Модель геометрии Евклида–Гильберта.** Мы сформулировали все аксиомы Гильберта. Чтобы доказать непротиворечивость его системы аксиом нужно заменить неопределяемые точки и прямые конкретными объектами, для которых все эти аксиомы легко проверить. Иными словами, нужно построить *модель*. Гильберт построил *арифметическую модель* геометрии, используя вещественные числа $\mathbb{R}$. Точки в его модели — это упорядоченные пары (x,y) вещественных чисел. Прямые — это тройки $(u:v:w)$ вещественных чисел, такие что u и v не равны одновременно нулю. Тройки берутся с точностью до пропорциональности, то есть, мы считаем (u,v,w) и $(\lambda u,\lambda v,\lambda w)$ эквивалентными для всех ненулевых $\lambda\in\mathbb{R}$, а $(u:v:w)$ обозначает их класс эквивалентности. Точка (x,y) *лежит* на прямой $(u:v:w)$, если

$$ux+vy+w=0.$$

Если вспомнить метод координат на плоскости, то становится понятной мотивировка определений точки и прямой. Аксиомы принадлежности и аксиома о параллельных теперь проверяются алгебраически с помощью решения системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Чтобы определить отношение “лежать между” для точек на прямой, воспользуемся отношением порядка в $\mathbb{R}$. Если $A=(x,y)$, $B=(x',y')$ и $C=(x'',y'')$ — три точки на прямой, скажем, что B лежит между A и C, если выполняется одно из условий

- $x<x'<x''$
- $x>x'>x''$
- $y<y'<y''$
- $y>y'>y''$

Тогда линейные аксиомы порядка прямо следуют из свойств порядка в $\mathbb{R}$. Интересно проверить аксиому Паша. Например, убедиться, что прямая делит плоскость на две полуплоскости. Действительно, для прямой $(u:v:w)$ определим полуплоскости, как подмножества $\{(x,y)\mid ux+vy+w>0\}$ и $\{(x,y)\mid ux+vy+w<0\}$. Тогда несложно проверить, что отрезок пересекает прямую тогда и только тогда, когда его концы находятся в разных полуплоскостях.

Чтобы определить конгруэнтность отрезков, можно ввести *длину* $|AB|$ отрезка с концами $A=(x,y)$, $B=(x',y')$, как

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

Скажем, что два отрезка *конгруэнтны*, если их длины равны.

Конгруэнтность углов определим с помощью *скалярного произведения* векторов и *косинуса* угла. *Косинусом* угла с вершиной $O=(x,y)$ и точками на сторонах $A=(x',y')$ и $B=(x'',y'')$ назовём число

$$\frac{(x-x')(x-x'')+(y-y')(y-y'')}{|OA||OB|}.$$

(Числитель этой формулы задаёт *скалярное произведение* векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.) Скажем, что углы *конгруэнтны*, если их косинусы равны. Определения длины отрезка и косинуса угла конечно же мотивированы теоремой Пифагора.

Наконец, аксиомы непрерывности прямо следуют из аксиомы Архимеда и аксиомы полноты для $\mathbb{R}$.

Если спросить современного математика, что он понимает под евклидовой плоскостью, то скорее всего, он определит именно такую модель с помощью фунадаментальных понятий “векторное пространство” (или родственного ему понятия “аффинное пространство”) и “квадратичная форма”. Он скажет, что евклидова плоскость — это *вещественное* аффинное пространство *размерности* два с *положительно определённой* квадратичной формой. Такое представление о плоскости настолько привычно математикам, что некоторые даже предлагали строить школьный курс геометрии на понятии векторного пространства. Например, этот подход последовательно развивается в книге [Ch] французского математика Густава Шоке, адресованной школьным учителям. В частности, Шоке категорически возражает против использования исчисления отрезков для превращения геометрической прямой в вещественную, а наоборот, призывает сразу использовать вещественные числа как модель геометрической прямой [Ch, стр. 17-18].

1.8. **Аксиомы векторного пространства.** Модель евклидовой плоскости можно обобщить на другие поля и другие размерности, получив полезное понятие *векторного пространства. Линейное*, или *векторное пространство* V над полем $\mathbb{F}$ состоит из множества V (его элементы называются *векторы*) и поля $\mathbb{F}$ (его элементы называются *скаляры* или просто числа). Векторы можно складывать друг с другом, и умножать на скаляры, причём эти операции удовлетворяют следующим восьми аксиомам:

Аксиомы сложения:

(1) $u+v=v+u$ для всех $u,v\in V$ (коммутативность);
(2) $u+(v+w)=(u+v)+w$ для всех $u,v,w\in V$ (ассоциативность);
(3) существует такой элемент $0\in V$ (называемый *нулём* или *нулевым вектором*), что $v+0=v$ для всех $v\in V$ (существование нейтрального элемента)
(4) для любого $v\in V$ существует такой элемент $-v\in V$, что $v+(-v)=0$ (существование обратного элемента)

Аксиомы умножения на скаляр:

(5) $c_1(c_2v)=(c_1c_2)v$ для всех $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ и $v\in V$ (ассоциативность);
(6) $1\cdot v=v$ для всех $v\in V$ (умножение на единицу поля сохраняет вектор);

(7) $(c_1+c_2)v = c_1v+c_2v$ для всех $c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ и $v \in V$ (дистрибутивность умножения относительно сложения скаляров);
(8) $c(v_1+v_2) = cv_1+cv_2$ для всех $c \in \mathbb{F}$ и $v_1, v_2 \in V$ (дистрибутивность умножения относительно сложения векторов);

Подпространством векторного пространства называется подмножество $W \subset V$ замкнутое относительно сложения векторов и умножения на скаляр (то есть, $u+v \in W$ и $\lambda u \in W$ для люыбых векторов $u, v \in W$ и скаляра $\lambda \in \mathbb{F}$). Можно проверить, что подпространство является векторным пространством.

Ключевой пример векторного пространства — координатное пространство $\mathbb{F}^n$. Вектора в нём — это наборы из n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{F}$. Сложение и умножение на скаляр определяются покоординатно

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n);$$

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n).$$

Аксиомы векторного пространства в этом случае прямо следуют из аксиом поля.

Ещё один пример векторного пространства можно получить из произвольной плоскости Π_H, удовлетворяющей аксиомам Гильберта $I - IV$. Нужно зафиксировать какую-нибудь точку (обозначим её через O) на плоскости. Её мы объявим *нулевым вектором.* Остальные *векторы* определим как направленные отрезки $\overline{OA}$ с началом в O и концом в другой точке точке плоскости A. Теперь зафиксируем эталонную прямую, проходящую через O и назовём её точки *скалярами.* Складывать и умножать скаляры можно с помощью определённого выше сложения и умножения классов эквивалентности отрезков (надо только аккуратно разобраться со случаем, когда скаляры лежат по разные стороны от точки O). Тогда из аксиом Гильберта можно вывести, что скаляры образуют поле (обозначим его через $\mathbb{F}_H$). Заметим, что далеко не любое поле может получиться таким образом. Например, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не получится как $\mathbb{F}_H$, потому что из теоремы Пифагора следует, что если $a \in \mathbb{F}_H$, то и $\sqrt{1+a^2} \in \mathbb{F}_H$, а в $\mathbb{Q}$ это явно не выполняется. В качестве $\mathbb{F}_H$ получаются только так называемые *пифагоровы* поля, то есть, поля, в которых сумма любых двух квадратов снова является квадратом.

Теперь определим сложение векторов в плоскости Π_H по правилу параллелограмма, а умножение на скаляр определим с помощью теоремы о пропорциональных отрезков (здесь снова нужно аккуратно рассмотреть случай “отрицательных” скаляров). Тогда из аксиом Гильберта для Π_H следует, что векторы в Π_H образуют векторное пространство над полем $\mathbb{F}_H$.

Векторные пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называют *вещественными векторными пространствами.* Вещественное координатное пространство $\mathbb{R}^n$ можно превратить в *евклидово пространство*, если определить длину вектора $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по формуле:

$$|v| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Формула мотивирована теоремой Пифагора (например, двукратное применение теоремы Пифагора доказывает, что квадрат длины пространственной диагонали кирпича равен сумме квадратов его длины, ширины и высоты). Часто под $\mathbb{R}^n$ подразумевают именно евклидово пространство, причём иногда *аффинное*, а не векторное. Это означает, что мы вместо векторов говорим о точках (как в модели евклидовой плоскости), забываем о специальной роли нулевого вектора, зато рассматриваем в качестве *аффинных подпространств* все подмножества, которые получаются из векторных подпространств параллельным переносом. В частности, аффинные подпространства не обязаны пересекаться, тогда как все векторные подпространства пересекаются по нулевому вектору. Аффинное пространство однородно (в отличие от векторного), то есть в окрестности каждой точки удовлетворяет одним и тем же аксиомам. Эти аксиомы можно явно выписать по аналогии с аксиомами векторного пространства.

1.9. **Размерность.** По Евклиду точка — это то, что не имеет частей, отрезок — это длина без ширины, поверхность — то, что имеет только длину и ширину. Иными словами, точка нульмерна, отрезок одномерен, а плоскость двумерна. Что это означает с точки зрения аксиоматического определения плоскости и пространства? Например, из какой аксиомы Гильберта следует, что в качестве плоскости нельзя взять трёхмерное пространство?

Помимо аксиом планиметрии Гильберт также сформулировал аксиомы стереометрии, то есть аксиомы трёхмерного пространства. Они отличаются от аксиом планиметрии всего лишь добавлением дополнительных отношений принадлежности в первую группу аксиом. Все остальные аксиомы просто дополняются трбованием, что рассматриваемые в них объекты лежат в одной и той же плоскости. Например, аксиома Паша очевидно не выполняется в трёхмерном пространстве, если не требовать, чтобы прямая и треугольник лежали в одной плоскости.

Пять дополнительных стереометрических аксиом Гильберта можно резюмировать так.

- I_{4-5} Для любых трёх точек, не лежащих на одной прямой, существует ровно одна плоскость, их содержащая
- I_6 Если плоскость и прямая пересекаются по двум точкам, то прямая лежит в плоскости.
- I_7 Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.
- I_8 Существуют по крайне мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Как из этих аксиом следует трёхмерность пространства? Первые три аксиомы выполняются и на плоскости, и в пространстве. Зато аксиома I_8 на плоскости уже явно не выполняется. Аксиома I_7 не выполняется в пространстве размерности выше, чем три. Вместе эти две аксиомы и позволяют заключить, что пространство трёхмерно. Это наблюдение мотивирует индуктивное определение размерности векторного пространства. Сначала определим нульмерное, одномерное и двумерные пространства.

- $\dim = 0$ Нульмерное пространство состоит из одного единственного вектора 0.
- $\dim = 1$ Пусть в векторном пространстве V есть такой вектор $u \in V$, что любой другой вектор $v \in V$ ему пропорционален (то есть, $v = cu$ для некоторого скаляра $c \in \mathbb{F}$). Тогда V одномерно или сокращённо $\dim V = 1$.
- $\dim = 2$ Пусть векторное пространство V содержит два непропорциональных вектора u_1 и u_2. Если любой вектор $v \in V$ можно представить как $c_1u_1 + c_2u_2$ для некоторых $c_1, c_2 \in V$, то V двумерно.

Теперь используя полную индукцию, определим n-мерные векторные пространства (или пространства размерности n) для $n \geq 3$. В качестве базы индукции мы используем случаи $\dim = 1$ и $\dim = 2$.

- $\dim = n$ Скажем, что векторное пространство V имеет размерность n (или сокращённо $\dim V = n$), если, во-первых, V содержит $(n-1)$-мерное подпространство и вектор, в нём не лежащий, во-вторых, любые два $(n-1)$-мерных подпространства в V пересекаются по $(n-2)$-мерному подпространству.

$\dim = \infty$ Если не существует n, для которого выполнен предыдущий пункт, то V бесконечномерно.

Например, для $n = 3$ это определение размерности практически копирует аксиомы Гильберта I_{7-8}. А согласуется ли оно с нашим интуитивным представлением о размерности, как о минимальном числе параметров, которое необходимо задать для точного определения положения точки в пространстве или размеров коробки? Оказывается, что да, но это нужно доказывать.

Теорема 8 (Размерность). *Каждое векторное пространство V размерности n над полем $\mathbb{F}^n$ изоморфно координатному пространству $\mathbb{F}^n$. То есть, существует взаимнооднозначное соответствие между векторами в V и векторами в $\mathbb{F}^n$, согласованное со сложением векторов и умножением на скаляры.*

Например, любое вещественное векторное пространство размерности два изоморфно $\mathbb{R}^2$. В частности, все модели геометрии Евклида–Гильберта изоморфны.

Список литературы

[Hi] Давид Гильберт, *Основания геометрии*, перевод с 7-го немецкого издания, ОГИЗ, 1948

[P] Алексей Васильевич Погорелов, *Геометрия. Учебник для 7-9 классов*, 2-е изд. - М.: 2014

[Ha] Robin Hartshorne, *Teaching Geometry According to Euclid*, Notices of the AMS, **47** (2000), no.4, 460–465

[Sh] Александр Шень, *О «математической строгости» и школьном курсе математики*, М.: МЦНМО, 2006

[Ch] Густав Шоке, *Геометрия*, перевод с французского, Мир, 1970

факультет математики, НИУ ВШЭ

E-mail address: vkiritch@hse.ru