ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИКИ
ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2017 Г.

Валентина Кириченко

1. Натуральные числа

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk
Леопольд Кронекер

Натуральные числа — это

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \dots$$

В математике натуральные числа обозначаются символом $\mathbb{N}$. Идея натуральных (то есть, данных нам от природы) чисел закладывается в нас (или сама собой возникает?) в раннем детстве. Даже младенцы вполне в состоянии пересчитать десять условленных ложек каши, чтобы не съесть лишней одиннадцатой. Для этого вовсе необязательно уметь говорить “один”, “два”, “три”,...

Замечание 1 (О смысле троеточия)**.** Мы ставим троеточие в

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \dots$$

и говорим “и так далее”, только когда нам абсолютно ясно, как продолжить ряд чисел после троеточия. Например, не стоит писать 1, 2,..., потому что это непонятно. Ведь ряд чисел 1, 2,... можно продолжить как 1, 2, 3, 4,..., а можно как 1, 2, 4, 8,.... И в том, и в другом случае есть простая закономерность. В первом случае все натуральные числа выписываются подряд, во втором случае все степени двойки выписываются подряд, то есть, $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$.

Напоминание 1. Степень a^n (произносится “a в степени n”) определяется как произведение

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}.$$

Например,

$$2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} = 8.$$

По определению $a^0 = 1$ для всех чисел a.

Из натуральных чисел можно построить все остальные числа: целые $\mathbb{Z}$ (от немецкого Zahlen, числа), рациональные $\mathbb{Q}$ (от итальянского quoziente, частное), действительные (от французского réel, настоящий), компле́ксные (от английского complex, сложный), а также “числа” в более широком понимании этого слова, например, *поле из двух элементов* или *кватернионы*. Об этих конструкциях мы и поговорим подробно в первой части курса.

Пример 1. *Полем из двух элементов* называется набор из двух элементов O и I с операциями сложения и умножения, заданными следующими таблицами:

$$\begin{array}{|c||c|c|}\hline + & O & I \\ \hline\hline O & O & I \\ \hline I & I & O \\ \hline \end{array}\ , \qquad \begin{array}{|c||c|c|}\hline \cdot & O & I \\ \hline\hline O & O & O \\ \hline I & O & I \\ \hline \end{array}\ .$$

Эти таблицы сопадают с таблицами сложения и умножения обычных целых чисел 0 и 1 за исключением тождества

$$I + I = O$$

или иначе говоря, “тождества выключателя”: дважды нажать кнопку включения — это то же самое, что не нажимать её вовсе.

Почему нам не удаётся обойтись только натуральными числами? Натуральные числа можно складывать и умножать, но не всегда можно вычитать и делить. Целые числа можно вычитать, но по-прежнему не всегда можно делить. С рациональными числами можно выполнять все четыре арифметические операции: сложение, умножение, вычитание и деление (на ненулевое число).

Рациональные числа — всюду плотные, то есть, если смотреть под микроскопом, то на любом сколь угодно малом участке прямой увидишь бесконечно много рациональных чисел. Но не все числа вокруг нас рациональны. Например, число $\sqrt{2}$ (длина диагонали единичного квадрата) — иррациональное (то есть, не рациональное). Как заполнить дыры между рациональными числами?

Упражнение 1. Найдите число x, такое что $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$, и при этом x
(а) рационально; (б) иррационально.

Факультет математики, НИУ ВШЭ
E-mail address: vkiritch@hse.ru