Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2017 г.

Задачи для подготовки к экзамену

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Запишите в системе счисления с основанием 4 числа
(а) 512; (б) 1023.

Задача 2. Натуральные числа m и n записываются в системе счисления с основанием 5 как 444 и 1303. Найдите призведение mn, и запишите его
(а) в системе счисления с основанием 5;
(б) в десятичной системе счисления.

Задача 3. Найдите признак делимости на 13 в десятичной системе счисления.

Задача 4. На доске сохранилась полустёртая запись (каждая звёздочка стоит на месте одной стёртой цифры)

$$23*5*+1*642 = 42423.$$

Выясните, в какой системе счисления написаны слагаемые и сумма.

Задача 5. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}.$$

Задача 6. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство
(а)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

(б)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

Задача 7. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{3^n}$ делится на 3^n.

Задача 8. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:
(1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);
(2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.
(Пример: в последовательности $\underline{0}01\underline{1}001\ldots$ можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты.) Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

Задача 9. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем. Докажите, что для любого $n \geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида. (Пример при $n = 3$:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.)$$

Задача 10. Докажите, что сумма углов выпуклого многоугольника на плоскости равна $180^\circ(n-2)$, где n — число сторон. (Многоугольник называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками содержит и соединяющий их отрезок.)

Задача 11. На доске написаны два числа $1; 1$. Вписав между числами их сумму, мы получим числа $1; 2; 1$. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа $1; 3; 2; 3; 1$. После трёх операций будут числа $1; 4; 3; 5; 2; 5; 3; 4; 1$. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?

Задача 12. Докажите для всех натуральных n, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$. Напомним, что $n!$ (произносится "эн факториал") определяется как

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Задача 13. Докажите, что для любого натурального n число
(а) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2})$ делится на 17; (б) $(n^{2m-1} + 1)$ делится на $(n + 1)$.

Задача 14. Докажите, что $n^2 - 1$
(а) делится на 3 для любого целого числа n, не кратного трём;
(б) делится на 4 для любого нечётного целого числа n.

Задача 15. Докажите, что простых натуральных чисел бесконечно много.

Задача 16. (а) Докажите для любого заданного поля $\mathbb{F}$, что существует бесконечно много неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из $\mathbb{F}$.

(б) Классифицируйте все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$.

(в) Приведите пример неприводимого многочлена степени 5 над полем из двух элементов.

(г) Докажите, что над полем из двух элементов существует неприводимый многочлен любой заданной степени.

Задача 17. (а) Докажите, что число вида $4k + 3$ не представляется в виде суммы двух полных квадратов ни для какого натурального k.

(б) Докажите, что если целые числа m и n представляются в виде суммы двух полных квадратов, то их произведение mn тоже представляется в виде суммы двух полных квадратов (и даже двумя способами).

Задача 18. Для каких остатков a по модулю p сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

разрешимо в целых числах, если p равно
(а) 5, (б) 13, (в) 23?

Задача 19. Докажите, что если p — простое число, то сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

разрешимо в целых числах ровно для половины всех ненулевых остатков a по модулю p.

Задача 20. (а) Докажите, что сравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \mod p$$

имеет нетривиальное решение в целых числах (*тривиальное решение* — это решение $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \mod p$).

(б) Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 999999999995$$

не имеет решений в целых числах.

Задача 21. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в целых числах тогда и только тогда, когда $p \equiv 3 \mod 4$.

Задача 22. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 23. (а) Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то n обязательно является простым числом. (Простые числа вида $2^n - 1$ называются *простыми числами Мерсенна.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 24. (а) Докажите, что если число $2^n + 1$ простое, то n обязательно является степенью двойки, то есть, $n = 2^m$ для некоторого натурального m. (Простые числа вида $2^{2^m} + 1$ называются *простыми числами Ферма.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 25. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков 0, 1, 2, 3, 4 при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$a + b = (a + b) \pmod 5,$$

$$ab = ab \pmod 5,$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{Z}$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 26. Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1 = 0$. Докажите или опровергните: уравнение $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = a$ будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого нечётного натурального n. (Предупреждение: тождество $1 + 1 = 0$ выполнено не только в поле из двух элементов, поэтому разбор примера $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ не является полным решением.)

Задача 27. Пусть в поле $\mathbb{F}$ тождество $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0$ не выполнено ни для какого натурального n. Докажите или опровергните: уравнение

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = a$$

будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого натурального n.

Задача 28. Докажите, что в каждом кольце выполняются тождества:

$$1)\ -a = (-1) \cdot a; \quad 2)\ a \cdot 0 = 0; \quad 3)\ (-a) \cdot b = (-ab).$$

Доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 29 (Делители нуля)**.** (а) Докажите, что если

$$ab = 0$$

для двух элементов a и b поля, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.

(б) Приведите пример кольца, в котором есть делители нуля, то есть, два ненулевых элемента a и b, такие что $ab = 0$.

Задача 30. Введём на упорядоченных парах целых чисел (m,n) такое отношение эквивалентности:

$$(m,n) \sim (k,l) \text{ тогда и только тогда, когда } (m+n-k-l) \text{ чётно }.$$

(а) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

(б) На клетчатой бумаге нарисуйте все такие точки с координатами (m,n), что (m,n) и $(0,0)$ лежат в одном и том же классе эквивалентности, и при этом $0 \leq m,n \leq 10$.

(в) Найдите число классов эквивалентности.

Задача 31. Введём на упорядоченных парах целых чисел (m,n) такое отношение эквивалентности:

$$(m,n) \sim (k,l) \text{ тогда и только тогда, когда } (m+n-k-l) \text{ делится на } 3 .$$

(а) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

(б) На клетчатой бумаге нарисуйте все такие точки с координатами (m,n), что (m,n) и $(0,0)$ лежат в одном и том же классе эквивалентности, и при этом где $0 \leq m,n \leq 10$.

(в) Найдите число классов эквивалентности.

Задача 32. Докажите, что для любых натуральных чисел p и q выполнено неравенство

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{5q^2}.$$

Иными словами, $\sqrt{2}$ не слишком хорошо приближается рациональными числами.

Задача 33 (Стандарт ISO216 A4)**.** (а) Найдите разложение в цепную дробь числа $\sqrt{2}$.

(б) Как известно, лист бумаги формата $A4$ имеет размер 210мм×297мм. Докажите, что отношение длин сторон $\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$ равно подходящей дроби, полученной обрезанием цепной дроби для числа $\sqrt{2}$ на 6-ом месте.

Задача 34 (Золотое сечение)**.** (а) Найдите разложение в цепную дробь числа $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(б) Как известно, соседние листья на стебле или цветки в соцветии у растений часто располагаются под углом $\psi = 137.5^\circ$ друг к другу (пример — семена подсолнуха). Докажите, что $\frac{360^\circ}{360^\circ - \psi}$ равно подходящей дроби, полученной обрезанием цепной дроби для числа $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ на 11-ом месте.

Задача 35. Докажите, что вещественное число α иррационально тогда и только тогда, когда для любого натурального n можно найти целые p_n и q_n такие, что $|p_n|, |q_n| > n$ и при этом

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}.$$

Задача 36. Существуют ли такие иррациональные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что α^β рационально?

Задача 37. Представьте следующие комплексные числа в виде $a+bi$, где $a,b \in \mathbb{R}$.

$$\text{(а) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}; \quad \text{(б) } \sqrt{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}; \quad \text{(в) } \sqrt{1+i\sqrt{3}}.$$

Задача 38. Найдите все комплексные решения уравнения
(а)$z^3+3z^2+3z+3=0$; (б) $z^4+4=0$; (в) $(z+i)^4=(z-i)^4$; (г) $z^4+(z-4)^4=32$.

Задача 39. Докажите, что число $\frac{2+i}{2-i}$ не является корнем n-ой степени из единицы ни для какого натурального n.

Задача 40. Нарисуйте на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:
(а) $\Re e\ z=1$; (б) $\Im m\ z=2$; (в) $|z=3|$; (г) $\Re e\ z\geq 1$, $\Im m\ z\geq 2$, $|z|\leq 3$.

Задача 41. (а) Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

(б) Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла равна половине гипотенузы.

(в) Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины прямого угла.

Задача 42 (Теорема Вариньона)**.** Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Задача 43. Две окружности касаются в точке A. На первой окружности отмечены точки B и C. Прямые AB и AC пересекают вторую окружность в точках D и E. Докажите, что отрезки BC и DE параллельны.

Задача 44. Чему равна площадь треугольника со сторонами 18, 17, 35?

Задача 45. В треугольнике длины двух сторон равны 3.14 и 0.67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она является целым числом.

Задача 46. Постройте циркулем и линейкой биссектрису угла, вершина которого закрыта кляксой.

Задача 47. Дана точка на стороне треугольника. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, проходящую через точку и делящую треугольник на две равновеликих фигуры.

Задача 48. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от l. Постройте циркулем и линейкой окружность, проходящую через точки A и B и касающаюся прямой l.

Задача 49. Завяжите узлом длинную и узкую полоску бумаги (см. рис. 1). Докажите, что узел — правильный пятиугольник.

Задача 50 (Задача Фаньяно)**.** Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник Δ наименьшего периметра, так чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала ровно одна вершина треугольника Δ.

Задача 51. Треугольники OAB и $OA'B'$ подобны. Построим точки A'' и B'' так, чтобы выполнялись векторные равенства $\overline{OA}+\overline{OA'}=\overline{OA''}$ и $\overline{OB}+\overline{OB'}=\overline{OB''}$. Докажите, что треугольники OAB и $OA''B''$ тоже подобны.

Задача 52. Докажите, что любые три вектора $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ на плоскости *линейно зависимы*, то есть, найдутся такие вещественные числа a, b и c, не равные одновременно нулю, что
$$a\overline{OA}+b\overline{OB}+c\overline{OC}=0.$$

Задача 53. Можно ли представить $\sqrt[3]{4}$ как линейную комбинацию $a+b\sqrt[3]{2}$, где a и b — рациональные числа?

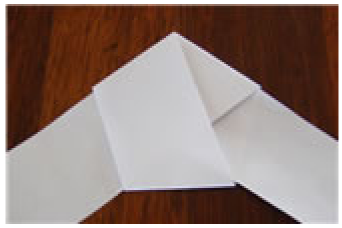

Рис. 1. Узел-пятиугольник (фотография https://www.mathsisfun.com)

Задача 54. Чему равна размерность поля комплексных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над полем
(а) рациональных чисел; (б) вещественных чисел?

Задача 55. На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 56. Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на $\frac{9}{10}$ заполнена краской, причём в каждой банке — свой цвет, и все цвета разные. Можно ли, переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое), получить хотя бы в одной из банок смесь, в которой все 7 красок смешаны в равной пропорции? (Выливать краску куда-либо, кроме банок, нельзя.)

Задача 57. (а) Даны четыре попарно скрещивающиеся прямые в пространстве (то есть, никакие две из них не лежат в одной плоскости). Может ли быть бесконечным количество прямых, пересекающих одновременно все четыре данные прямые?

(б) Предположим, что для данной конфигурации из четырёх прямых в пространстве, количество прямых, пересекающих все четыре, конечно. Чему оно может быть равно? Перечислите все возможные варианты.