Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2017 г.

Задачи для семинара 2.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите и докажите явную формулу для суммы геометрической прогрессии
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Задача 2. Докажите следующие тождества

(а) $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$; (б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$.

Задача 3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

(1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);

(2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

(Пример: в последовательности $\underline{0}01\underline{1}001\ldots$ можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты.) Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

Задача 4. (а) Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета.

(б) На сколько частей делят плоскость n прямых в общем положении? Напомним, что прямые находятся *в общем положении*, если никакие две из них не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке.

(в)* На сколько частей делят пространство n плоскостей в общем положении? Напомним, что плоскости находятся *в общем положении*, если никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются по прямой, и никакие четыре не пересекаются в одной точке.

Задача 5. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем. Докажите, что для любого $n\geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида. Пример при $n=3$:
$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

Задача 6. (а) Вычислите сумму
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$$

(б) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$$

(в) Докажите, что для любого натурального k найдётся такое натуральное n, что
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\geq k$$

(г)* Существует ли такая последовательность вещественных чисел a_1, a_2, a_3,…, a_n, что
$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\leq 1, \text{ и при этом } a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\geq 1000000?$$