

**Задачи для семинара 4.**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** (а) Запишите в виде десятичной дроби обыкновенную дробь  $\frac{5}{7}$ .

(б) Запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 1.3(12).

**Задача 2.** Выпишите разложение в цепную дробь чисел

$$(a) \frac{100}{37}; \quad (б) \frac{34}{21}; \quad (в) \frac{1000001}{1000}.$$

**Задача 3.** Найдите наилучшее рациональное приближение числа  $\pi$  среди всех обыкновенных дробей со знаменателем, не превосходящим 10.

**Задача 4.** Найдите разложение в цепную дробь чисел

$$(a) \sqrt{3}; \quad (б) \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad (в) \sqrt{7}.$$

**Задача 5.** (а) На плоскости в начале координат сидит охотник, а во всех остальных точках с целыми координатами сидят круглые зайцы радиуса  $\frac{1}{100}$ . Докажите, что независимо от меткости и направления выстрела охотник всегда попадёт в какого-нибудь зайца (предполагается, что пуля летит по прямой сколь угодно долго, если только не попадёт в зайца).

(б) Собака охотника может принести хозяину подстреленного зайца, только если расстояние между зайцем и охотником было не больше  $R$ . При каких значениях  $R$  охотник рискует остаться без добычи?

**Задача 6.** Докажите, что куб целого числа может начинаться с цифр 20172017.

**Задача 7.** (а) Докажите, что для любых натуральных чисел  $p$  и  $q$  выполнено неравенство

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{5q^2}.$$

Иными словами,  $\sqrt{2}$  не слишком хорошо приближается рациональными числами.

(б) Докажите, что для любого вещественного числа  $\alpha$  найдутся такие целые числа  $p \neq 0$  и  $q$ , что

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

**Задача 8.** Решите в целых числах уравнение Пелля

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$