Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2017 г.

Задачи для двойного семинара 5

Часть I —комплексные числа, часть II — построения циркулем и линейкой

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Вычислите (а) $(1+i)^8$; (б) $\frac{1}{3+4i}$.

Задача 2. Для каждого комплексного числа z определим преобразование плоскости M_z таким образом: каждая точка w переходит в точку $z \cdot w$.

(а) Представьте M_{1+i} в виде композиции поворота и растяжения.

(б) Докажите, что M_z при $z \neq 0$ является преобразованием подобия, то есть, увеличивает все расстояния в одинаковое число раз.

Задача 3. (а) Проверьте, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

(б) Выведите из пункта (а) формулу для $\cos(\varphi+\psi)$ и $\sin(\varphi+\psi)$.

Задача 4. Докажите, что всякое комплексное число является квадратом некоторого комплексного числа.

Задача 5 (Формула Муавра)**.** Выпишите формулу для комплексных корней степени n из единицы, используя тригонометрическую форму комплексного числа. Получите явную формулу (в радикалах), когда $n = 3,\ 4,\ 5$.

Задача 6. Нарисуйте на плоскости множество точек z, удовлетворяющих уравнению

$$|z-1| = 2|z+1|.$$

Задача 7. Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$ (1) из $a > b$ следует $a + c > b + c$; (2) из $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $ab > 0$.)

Задача 8. (а) Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке z_0 и проходящими через точки z_1 и z_2, равен аргументу отношения $V(z_2, z_1, z_0) = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$.

(б) Докажите, что четыре точки z_0, z_1, z_2 и z_3 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только когда их *двойное отношение*

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}$$

является вещественным числом.

Задача 9. Пусть $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ – многочлен третьей степени с комплексными корнями a, b и c. Докажите, что корни производной этого многочлена лежат внутри треугольника с вершинами в точках a, b, c.

Задача 10. (а) Определим *кватернионы* $\mathbb{H}$ как алгебру линейных операторов на плоскости $\mathbb{C}^2$, заданных матрицами вида

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Докажите, что в $\mathbb{H}$ выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности умножения.

(б) Определим *октавы* или *числа Кэли* $\mathbb{O}$ как алгебру линейных операторов на плоскости $\mathbb{H}^2$, заданных матрицами вида

$$\begin{pmatrix} L_a & -R_{\bar{b}} \\ R_b & L_{\bar{a}} \end{pmatrix},$$

где L_h, R_h, соответственно, обозначают операторы левого и правого умножения на кватернион h в $\mathbb{H}$. Докажите, что в $\mathbb{O}$ выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности и ассоциативности умножения.

Задача 11. Постройте с помощью циркуля и линейки середину данного отрезка.

Задача 12. Постройте с помощью циркуля и линейки
(а) равносторонний треугольник, (б) квадрат,
(в) правильный шестиугольник, (г) правильный 2^n-угольник.

Задача 13. Даны отрезок длины a и отрезок длины b. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок длины
(а) $a+b$; (б) ab; (в) $\frac{a}{b}$; (г) $\sqrt{ab}$.

Задача 14. (а) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны $72^\circ = 2\pi/5$. Докажите, что биссектриса угла при основании делит треугольник на два равнобедренных треугольника, один из которых подобен исходному.

(б) Постройте с помощью циркуля и линейки правильный пятиугольник и правильный 15-угольник (заметим, что задачи 5 и 14(а) дают два разных способа явного вычисления $\cos(2\pi/5)$ в радикалах).

Задача 15. С помощью циркуля и линейки разделите угол в 19° градусов на 19 равных углов.

Задача 16. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может нарисовать две пересекающиеся прямые и невыпуклый 15-угольник так, что каждая вершина 15-угольника будет лежать на одной из этих прямых. Не хвастает ли барон?

Задача 17. Имеется n букв "Г" из Тетриса (например, четырёхклеточные буквы "Г" на клетчатой бумаге). Составьте из них фигуру, имеющую ось симметрии, при

(а) $n = 2$; (б) любом натуральном $n > 2$.

Буквы разрешается переворачивать (то есть, превращать "Г" в "L").

Задача 18. Существует ли невыпуклый пятиугольник, в котором никакие две диагонали не пересекаются (то есть, не имеют общих точек, кроме вершин)?

Задача 19. Точку внутри квадрата соединили с вершинами – получились четыре треугольника, один из которых равнобедренный с углами при основании (стороне квадрата) 15°. Докажите, что противоположный ему треугольник равносторонний.

Задача 20. Разрежьте круг на равные части, не все из которых доходят до центра круга.