

Задачи для двойного семинара 6.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Неравенство треугольника). Докажите, что в треугольнике с длинами сторон a , b и c выполнены неравенства

$$|a - b| < c < a + b.$$

Задача 2. (а) Существует ли треугольник с длинами сторон 1, 3 и 5?

(б) В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 3, 5, 7, 11, 17. Чему равна длина измеренной диагонали?

Задача 3. Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

Задача 4. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Задача 5. Докажите, что если в треугольнике равны

- (а) две высоты; (б) две медианы,
то треугольник равнобедренный.

Задача 6. Две деревни расположены в точках A и B , а шоссе идёт вдоль прямой l . Жители деревень хотят построить на шоссе магазин так, чтобы минимизировать маршрут из одной деревни в другую через магазин. Найдите точку на шоссе, в которой им нужно построить магазин.

Задача 7. Внутри равностороннего треугольника выбрана точка T . Докажите, что сумма расстояний от точки T до сторон треугольника не зависит от выбора точки.

Задача 8 (Точка Торричелли). На плоскости даны три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой. Для какой точки T плоскости сумма расстояний $AT + BT + CT$ наименьшая?

Задача 9. Четыре города расположены в вершинах квадрата $ABCD$. Жители городов хотят построить аэропорт и ж/д вокзал в точках E и F , соответственно, и проложить пять дорог: AE , BE , CF , DF и EF . Как нужно выбрать точки E и F , чтобы суммарная длина дорог была минимальна? Чему равна эта длина, если расстояние между A и B равно 1?

Задача 10. Фермер хочет огородить прямоугольный загон, так чтобы его площадь была равна 400 м^2 . Найдите минимальный возможный периметр загона.

Задача 11. Фермер хочет огородить прямоугольный загон, так чтобы его площадь была равна 200 м^2 , а одна из сторон шла вдоль прямолинейной реки (то есть, забор пойдёт только по трём другим сторонам). Найдите длины сторон загона, при которых суммарная длина забора минимальна.

Задача 12. На плоскости дано n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

Задача 13. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)?

Задача 14 (Теорема Штейнера–Лемуса). Докажите, что если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный.

Задача 15. В прямоугольном параллелепипеде сумма длин рёбер равна 16, а сумма площадей граней равна 10. Найдите максимальный возможный объём параллелепипеда.