

Задачи для двойного семинара 7.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1 (Pons asinorum). В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Задача 2. Докажите, что диаметр окружности виден из любой ее точки (кроме концов этого диаметра) под прямым углом.

Задача 3 (Теорема Фалеса). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне угла.

Задача 4 (Лемма “Стар Трек”). Величина вписанного угла равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Задача 5. Окружность разделена в отношении $3 : 4 : 5$, и точки деления соединены между собой. Найдите углы полученного треугольника.

Задача 6 (Теорема о пропорциональных отрезках). Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки.

Задача 7. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K . Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P . Оказалось, что $AK = AP$. Найдите отношение $BK : PM$.

Задача 8 (Теорема Дезарга). Два треугольника на плоскости имеют центр перспективы тогда и только тогда, когда они имеют ось перспективы

Задача 9 (Недезаргова плоскость). Приведите пример аффинной или проективной плоскости, в которой теорема Дезарга неверна.

Задача 10 (Частный случай теоремы Паппа). На одной стороне угла выбраны точки A, B и C , а на другой — точки A', B' и C' (отличные от вершины угла), так что CA' и $C'A$ параллельны, и CB' и $C'B$ параллельны. Докажите, что и отрезки AB' и $A'B$ параллельны.

Задача 11 (Частный случай теоремы Паскаля). Во вписанном шестиугольнике $ABCDEF$ стороны AB и DE параллельны, и стороны BC и EF параллельны. Докажите, что и стороны CD и FA параллельны.

Задача 12. Дана трапеция с длинами оснований a и b . На боковых сторонах трапеции выбраны точки M и N , так что отрезок MN параллелен основаниям. Найдите длину отрезка MN , если

- (а) MN проходит через точку пересечения диагоналей;
- (б) MN делит трапецию на две подобных трапеции;
- (в) MN делит трапецию на две равновеликих трапеции.

(г) Докажите, что среднее гармоническое чисел a и b не превосходит их среднего геометрического, а последнее в свою очередь не превосходит их среднего квадратичного.

Задача 13. Докажите, что в произвольном треугольнике в одной точке пересекаются (а) биссектрисы; (б) высоты или их продолжения.

Задача 14 (Теорема Чевы). Пусть точки A' , B' , C' лежат на сторонах BC , CA , AB , соответственно, треугольника ABC . Докажите, что прямые AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$

Задача 15 (Теорема Менелая). Пусть точки A' , B' , C' лежат на сторонах BC , CA , AB , соответственно, треугольника ABC или на их продолжениях. Докажите, что A' , B' , C' лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Через \overline{AB} обозначается вектор, с началом в A и концом в B .