Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2017 г.

Задачи для двойного семинара 8

Часть I —плоскости Гильберта, часть II — векторные пространства

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. *Плоскостью Гильберта* назовём плоскость, удовлетворяющую аксиомам Гильберта I-III (то есть, всем аксиомам первых трёх групп).

Плоскость Гильберта назовём *евклидовой*, если она дополнительно удовлетврояет аксиомам IV-V.

Гиперболической плоскостью или *плоскостью Лобачевского* назовём плоскость Гильберта, которая дополнительно удовлеторяет следующей аксиоме:

(L) Для любой прямой l и любой точки A, не лежащей на этой прямой, существуют такие два луча AB и AC, не лежащие на одной прямой, и не пересекающие l, что любой луч AE внутри угла BAC пересекает l.

Мы не накладываем аксиомы V_{1-2} на гиперболическую плоскость, но их можно использовать в задачах, если это упрощает решение.

Задача 1. Треугольники ABC и ABD на евклидовой плоскости имеют общую сторону AB, и лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что они имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда вершины C и D лежат на прямой, параллельной AB.

Задача 2. Треугольники ABC и ABD на гиперболической плоскости имеют общую сторону AB, и лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что они имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда прямая, соединяющая середины сторон AC и BC, совпадает с прямой, соединяющей середины сторон AD и BD.

Задача 3. Пусть S — сфера единичного радиуса в евклидовом трёхмерном пространстве, а $\Delta \subset S$ — треугольник, образованный окружностями большого круга. Найдите площадь треугольника Δ, если его углы равны α, β и γ.

Задача 4 (AAA)**.** Докажите или опровергните следующее утверждение. Если три угла одного треугольника на гиперболической плоскости равны трём углам другого треугольника, то тругольники конгруэнтны.

Задача 5. Добавим к аксиомам Гильберта $I - III$ в качестве ещё одной аксиомы утверждение, что сумма углов треугольника строго меньше $180°$. Докажите, что на стороне любого острого угла можно выбрать точку так, чтобы восставленный в ней перпендикуляр был параллелен другой стороне угла.

Задача 6. Выведите из аксиом I_{1-3}, что любые две прямые на плоскости либо не пересекаются, либо пересекаются в единственной точке.

Задача 7. Выведите из аксиом I_{1-3} и II_{1-4}, что из трёх точек на прямой ровно одна лежит между двумя другими.

Задача 8 (Лишняя аксиома)**.** Выведите из аксиом I_{1-3} и II_{1-4}, что любые четыре точки на прямой можно обозначить буквами A, B, C, D так, чтобы точка, обозначенная буквой B, лежала как между точками A и C, так и между A и D, а точка, обозначенная буквой C, лежала как между точками B и D, так и между A и D.

Задача 9. Приведите пример неархимедовой плоскости Гильберта (то есть, плоскости Гильберта, в которой неверна аксиома Архимеда IV_1).

Через $\mathbb{R}^n$ обозначается n-мерное вещественное координатное пространство.

Задача 10. Докажите, что покоординатное сложение векторов в $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет правилу параллелограмма.

Задача 11. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника в $\mathbb{R}^2$ есть средние арифметические соответствующих координат вершин треугольника.

Задача 12. (а) Плоская фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Верно ли, что она имеет центр симметрии?

(б) Существует ли плоская фигура, имеющая две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

Задача 13. На координатной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ дана точка A с координатами (x_0, y_0). Найдите координаты точки, в которую A перейдёт при

(а) параллельном переносе на вектор (a, b);

(б) отражении относительно прямой, заданной уравнением $y = kx$;

(в) повороте на угол φ относительно начала координат.

Задача 14. Докажите, что треугольник в $\mathbb{R}^4$ с вершинами $A = (4, 7, -3, 5)$, $B = (3, 0, -3, 1)$ и $C = (-1, 7, -3, 0)$ равнобедренный и вычислите длину его основания.

Задача 15. Будем рассматривать трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ как часть четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, состоящую из точек с координатами $(x, y, z, 0)$.

(а) Как нужно повернуть этот листок в $\mathbb{R}^4$, чтобы шрифт изменился на зеркальный?

(б) Докажите, что левый ботинок из $\mathbb{R}^3$ можно так повернуть в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ он станет правым ботинком.

(в) Докажите, что два зацепленных звена цепи в $\mathbb{R}^3$ можно так подвигать в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ они окажутся незацепленными.

Задача 16. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 17. Докажите, что у 100-мерного апельсина радиусом 6см с толщиной кожуры 3мм съедобная часть составляет меньше одного процента объема.

Задача 18. Проверьте, что координатная аффинная плоскость $\mathbb{F}^2$ над полем $\mathbb{F}$ удовлетворяет аксиомам I_{1-3}.

Задача 19. (а) Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ — подполе вещественных чисел. Определите на точках координатной аффинной плоскости $\mathbb{F}^2$ отношение “лежать между” так, чтобы выполнялись аксиомы порядка II_{1-4}.

(б) Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле (например, поле из двух элементов). Можно ли определить на точках координатной аффинной плоскости $\mathbb{F}^2$ отношение “лежать между” так, чтобы выполнялись аксиомы порядка II_{1-4}?

Задача 20. Определим длину отрезка с концами (x, y), (x', y') в $\mathbb{F}^2$ формулой $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. Скажем, что два отрезка конгруэнтны, если их длины равны.

(а) Выполняются ли аксиомы конгруэнтности III_{1-3} в $\mathbb{Q}^2$?

(б) Найдите минимальное (по включению) подполе $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$, такое что в $\mathbb{F}^2$ выполняются аксиомы конгруэнтности. Это поле называется *полем Гильберта.*

(в*) Докажите, что поле Гильберта не содержит число $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.