Задачи для подготовки к контрольной

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Запишите в системе счисления с основанием 4 числа
(а) 512; (б) 1023.

Задача 2. Натуральные числа m и n записываются в системе счисления с основанием 5 как 444 и 1303. Найдите призведение mn, и запишите его
(а) в системе счисления с основанием 5;
(б) в десятичной системе счисления.

Задача 3. Найдите признак делимости на 13 в десятичной системе счисления.

Задача 4. На доске сохранилась полустёртая запись (каждая звёздочка стоит на месте одной стёртой цифры)

$$23 * 5 * +1 * 642 = 42423.$$

Выясните, в какой системе счисления написаны слагаемые и сумма.

Задача 5. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}.$$

Задача 6. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство
(а)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

(б)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

Задача 7. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{3^n}$ делится на 3^n.

Задача 8. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:
(1) заменять первую цифру (нуль на единицу и наоборот);
(2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.
(Пример: в последовательности $\underline{0}01\underline{1}001\ldots$ можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты.) Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

Задача 9. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем. Докажите, что для любого $n \geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида. (Пример при $n = 3$:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.)$$

Задача 10. Докажите, что сумма углов выпуклого многоугольника на плоскости равна $180^\circ(n-2)$, где n — число сторон. (Многоугольник называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками содержит и соединяющий их отрезок.)

Задача 11. На доске написаны два числа $1; 1$. Вписав между числами их сумму, мы получим числа $1; 2; 1$. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа $1; 3; 2; 3; 1$. После трёх операций будут числа $1; 4; 3; 5; 2; 5; 3; 4; 1$. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?

Задача 12. Докажите для всех натуральных n, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$. Напомним, что $n!$ (произносится "эн факториал") определяется как

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Задача 13. Докажите, что для любого натурального n число
(а) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2})$ делится на 17; (б) $(n^{2m-1} + 1)$ делится на $(n+1)$.

Задача 14. Докажите, что $n^2 - 1$
(а) делится на 3 для любого целого числа n, не кратного трём;
(б) делится на 4 для любого нечётного целого числа n.

Задача 15. Докажите, что простых натуральных чисел бесконечно много.

Задача 16. (а) Докажите, что число вида $4k + 3$ не представляется в виде суммы двух полных квадратов ни для какого натурального k.
(б) Докажите, что если целые числа m и n представляются в виде суммы двух полных квадратов, то их произведение mn тоже представляется в виде суммы двух полных квадратов (и даже двумя способами).

Задача 17. Для каких остатков a по модулю p сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

разрешимо в целых числах, если p равно
(а) 5, (б) 13, (в) 23?

Задача 18. Докажите, что если p — простое число, то сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

разрешимо в целых числах ровно для половины всех ненулевых остатков a по модулю p.

Задача 19. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 20. (а) Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то n обязательно является простым числом. (Простые числа вида $2^n - 1$ называются *простыми числами Мерсенна.*)
(б) Верно ли обратное?

Задача 21. (а) Докажите, что если число $2^n + 1$ простое, то n обязательно является степенью двойки, то есть, $n = 2^m$ для некоторого натурального m. (Простые числа вида $2^{2^m} + 1$ называются *простыми числами Ферма.*)
(б) Верно ли обратное?

Задача 22. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков 0, 1, 2, 3, 4 при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$a + b = (a + b) \pmod 5,$$

$$ab = ab \pmod 5,$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{Z}$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 23. Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1=0$. Докажите или опровергните: уравнение $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$ будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого нечётного натурального n. (Предупреждение: тождество $1+1=0$ выполнено не только в поле из двух элементов, поэтому разбор примера $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ не является полным решением.)

Задача 24. Пусть в поле $\mathbb{F}$ тождество $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}=0$ не выполнено ни для какого натурального n. Докажите или опровергните: уравнение

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$$

будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого натурального n.

Задача 25. Докажите, что в каждом кольце выполняются тождества:

$$1)\ -a=(-1)\cdot a;\quad 2)\ a\cdot 0=0;\quad 3)\ (-a)\cdot b=(-ab).$$

Доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 26 (Делители нуля)**.** (а) Докажите, что если

$$ab=0$$

для двух элементов a и b поля, то либо $a=0$, либо $b=0$.

(б) Приведите пример кольца, в котором есть делители нуля, то есть, два ненулевых элемента a и b, такие что $ab=0$.

Задача 27. Введём на упорядоченных парах целых чисел (m,n) такое отношение эквивалентности:

$$(m,n)\sim(k,l) \text{ тогда и только тогда, когда } (m+n-k-l) \text{ чётно }.$$

(а) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

(б) На клетчатой бумаге нарисуйте все такие точки с координатами (m,n), что (m,n) и $(0,0)$ лежат в одном и том же классе эквивалентности, и при этом $0\le m,n\le 10$.

(в) Найдите число классов эквивалентности.

Задача 28. Введём на упорядоченных парах целых чисел (m,n) такое отношение эквивалентности:

$$(m,n)\sim(k,l) \text{ тогда и только тогда, когда } (m+n-k-l) \text{ делится на } 3\ .$$

(а) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

(б) На клетчатой бумаге нарисуйте все такие точки с координатами (m,n), что (m,n) и $(0,0)$ лежат в одном и том же классе эквивалентности, и при этом где $0\le m,n\le 10$.

(в) Найдите число классов эквивалентности.