Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 3. Алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите все линейные отображения $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ координатной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, которые переводят прямую $\{y = x\}$ в прямую $\{y = 3x\}$.

Задача 2. Проверьте ассоциативность умножения матриц прямым вычислением в следующем случае:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Это пример с самопроверкой — неправильно перемножите, не сойдётся. Если хотите потренироваться в умножении матриц, можете сами придумать себе примеры по этому же принципу.)

Задача 3. Найдите матрицы следующих линейных отображений на координатной плоскости:

(а) отражение относительно прямой $\{x = y\}$,

(б) поворот на $\frac{\pi}{4}$ относительно начала координат,

(в) гомотетия с коэффициентом 10 относительно начала координат,

(г) проекция на ось x вдоль оси y.

Задача 4. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

для всех натуральных n.

Задача 5. Линейное отображение $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ координатной плоскости задано матрицей:

$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определите, является ли A взаимно-однозначным, сохраняет ли оно углы, и сохраняет ли расстояния.

Задача 6. Пусть A и B — квадратные $n \times n$ матрицы.

(а) Всегда ли верно, что $AB = BA$?

(б) Когда верно $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

(в) Раскройте скобки в произведении $(A + B)^3$.

Задача 7. В координатном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ найдите матрицу поворота:

(а) на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = z\}$;

(б) на угол φ относительно прямой $\{x = y = z\}$;

(в) на угол φ относительно прямой $\{x = py = qz\}$, где $p, q \neq 0$.

Задача 8. Найдите формулу для

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

для всех натуральных n и докажите её по индукции.