Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 2. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Докажите, что покоординатное сложение векторов в $\mathbb{R}^2$ (то есть сложение по формуле $(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$) удовлетворяет правилу треугольника (или правилу параллелограмма).

(б) Докажите, что каждая координата точки пересечения медиан треугольника в $\mathbb{R}^2$ равна среднему арифметическому соответствующих координат вершин треугольника.

(в) Останутся ли утверждения пунктов (а) и (б) верными в $\mathbb{R}^n$?

Задача 2. (а) Плоская фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Верно ли, что она имеет центр симметрии?

(б) Существует ли плоская фигура, имеющая две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

Задача 3. На координатной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ дана точка A с координатами (x_0, y_0). Найдите координаты точки, в которую A перейдёт при

(а) параллельном переносе на вектор (a, b);

(б) отражении относительно прямой, заданной уравнением $y = kx$;

(в) повороте на угол φ относительно начала координат.

Задача 4. Докажите, что любое движение плоскости представляется в виде композиции не более чем трёх отражений.

Задача 5. На плоскости нарисована пара одинаковых букв Я. Существует ли движение плоскости, которое эту пару букв переводит в буквы Я и R (под буквой R подразумевается точное зеркальное отражение буквы Я)?

Определение 1. *Движение плоскости, переводящее букву Я в букву R, называется несобственным. Движение, переводящее букву Я в букву Я (возможно, другую), называется собственным.*

Задача 6 (Теорема Шаля)**.** Докажите следующие утверждения:

(а) Любое собственное движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом.

(б) Любое несобственное движение плоскости является либо отражением, либо скользящей симметрией.

Задача 7. В каких случаях композиция двух поворотов на углы α и β относительно соответствующих центров A и B тоже является поворотом? Как найти его центр и угол?

Задача 8. Сформулируйте и докажите трёхмерный аналог теоремы Шаля.

Задача 9. Будем рассматривать трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ как часть четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, состоящую из точек с координатами $(x, y, z, 0)$.

(а) Как нужно повернуть этот листок в $\mathbb{R}^4$, чтобы шрифт изменился на зеркальный?

(б) Докажите, что левый ботинок из $\mathbb{R}^3$ можно так повернуть в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ он станет правым ботинком.

(в) Докажите, что два зацепленных звена цепи в $\mathbb{R}^3$ можно так подвигать в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ они окажутся незацепленными.