Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 4. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Через O обозначим начало координат на плоскости $\mathbb{R}^2$. Известно, что точка X лежит на отрезке AB и делит его в отношении $4:1$. Найдите такие $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что выполнено равенство векторов: $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$.

Задача 2. Найдите расстояние от точки $(10, 11) \in \mathbb{R}^2$ до прямой, натянутой на вектор $(2, 1)$.

Задача 3. Найдите угол между векторами $(1, 2, 3)$ и $(1, 1, 1)$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, натянутая на векторы $(1, 2, 3)$ и $(1, 1, 1)$.
(а) Найдите вектор единичной длины, перпендикулярный плоскости Π.
(б) Найдите расстояние от точки $(3, 4, 6) \in \mathbb{R}^3$ до плоскости Π.
(в) Найдите ортогональную проекцию вектора $(3, 4, 6)$ на плоскость Π.

Задача 5. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $(3, 4, 6)$, $(1, 2, 3)$ и $(1, 1, 1)$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 6. (а) На лекции мы определили косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ и $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ в $\mathbb{R}^2$ следующей формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Также мы определили ориентированную площадь $\omega(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ формулой:

$$\omega(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Выполняется ли при таких определениях следующая формула для площади из школьной геометрии:

$$\omega(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\varphi?$$

(б) Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца в $\mathbb{R}^2$:

$$|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \leq |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|.$$

Задача 7. Зададим *метрику такси* в $\mathbb{R}^2$ следующей формулой для расстояния между точками (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

(а) Проверьте, что для метрики $d(\cdot, \cdot)$ выполняется неравенство треугольника.
(б) Нарисуйте единичную (относительно метрики $d(\cdot, \cdot)$) окружность с центром в нуле.

Задача 8. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 9. Докажите, что у 100-мерного апельсина радиусом 6см с толщиной кожуры 3мм съедобная часть составляет меньше одного процента объема.