

**Семинар 5. Алгебра**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Определим перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите

(а)  $\sigma\tau$ ; (б)  $\tau\sigma$ ; (в)  $\tau^{-1}$ ; (г)  $\sigma^{-1}$ ; (д)  $\sigma^{2017}\tau^{2018}$ .

**Задача 2.** (а) Разложите перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 9 & 7 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

в произведение непересекающихся циклов.

(б) Разложите перестановку из пункта (а) в произведение минимального числа транспозиций.

(в) Найдите длину и знак перестановки из пункта (а).

**Задача 3.** (а) Сколько чётных перестановок в  $S_n$ ?

(б) Найдите перестановку в  $S_n$  с максимальным числом инверсий.

(в) Вычислите суммарное количество инверсий у всех перестановок в  $S_n$ .

**Задача 4.** Текст зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некую другую. Докажите, что этот текст можно расшифровать, применив определённое число раз шифрующую программу.

**Задача 5.** Несколько жителей города  $N$  хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

**Задача 6.** В головоломке “Пятнашки” требуется упорядочить по возрастанию 15 одинаковых квадратиков с номерами от 1 до 15, передвигая их по дну квадратной коробки, сторона которой ровно в четыре раза больше стороны квадратика (то есть, в коробке остаётся ровно одно незаполненное поле в виде квадратика). Докажите, что если в начальном расположении все квадратикоты от 1 до 13 стояли на своём месте, а 14 и 15 были переставлены местами, то головоломку собрать не получится.

**Задача 7.** Король решил сократить штат из двадцати мудрецов, уволив наименее умных. Для этого он разложил 20 номеров от 1 до 20 по шкатулкам, тоже занумерованным числами от 1 до 20. Двадцать мудрецов по очереди заходят в комнату со шкатулками, каждый открывает 10 шкатулок, а стражник следит, чтобы они не переставляли содержимое шкатулок и не разговаривали друг с другом. Если мудрец не сумел открыть шкатулку со своим порядковым номером в очереди, его увольняют. Мудрецы подкупили стражника, чтобы он разрешил первому мудрецу посмотреть содержимое всех шкатулок и поменять местами два номера (на большее стражник не согласен), после чего все остальные мудрецы будут играть строго по правилам. Что нужно сделать первому мудрецу, чтобы никого не уволили?