

Семинар 6. Геометрия

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Определение 1. Группой симметрий фигуры $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ называется множество всех таких движений g пространства \mathbb{R}^n , что $g(\Phi) = \Phi$. Группой вращений плоской или пространственной фигуры называется подмножество её группы симметрий, состоящее из поворотов.

Задача 1. Найдите число элементов в группе симметрий:

(а) равностороннего треугольника; (б) прямоугольника, не являющегося квадратом; (в) квадрата.

Задача 2. (а) Опишите все повороты и отражения в группе симметрий правильного n -угольника при $n \geq 2$ (эта группа называется *группой диэдра* и обозначается D_n).

(б) Занумеруем вершины правильного n -угольника числами от 1 до n против часовой стрелки. Используя эту нумерацию, сопоставьте каждому движению из D_n перестановку из S_n . Каким перестановкам из S_n соответствуют повороты и отражения из пункта (а)?

(в) При каких n отображение $D_n \rightarrow S_n$ из пункта (б) является взаимно-однозначным? Инъективным? Сюръективным?

Определение 2. Взаимно-однозначное отображение групп $\varphi : G \rightarrow H$ называется *изоморфизмом*, если для любых двух элементов $g_1, g_2 \in G$ выполняется тождество $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$.

Задача 3. (а) Докажите, что группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4 .

(б) Какие перестановки вершин тетраэдра можно получить с помощью вращений тетраэдра?

(в) Докажите, что группа вращений правильного тетраэдра изоморфна A_4 .

Задача 4. (а) Какие перестановки пространственных диагоналей куба можно получить с помощью вращений куба?

(б) Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4 .

Задача 5. (а) Придумайте такое сюръективное отображение $\varphi : S_4 \rightarrow S_3$, чтобы для любых двух перестановок выполнялось тождество $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$. (Иными словами, φ должно быть *гомоморфизмом*.)

(б) Найдите прообраз $\varphi^{-1}(\text{id})$ единичной перестановки.

Задача 6. Существует ли сюръективный гомоморфизм $S_4 \rightarrow D_2$?

Задача 7. (а) Сколько элементов в группе вращений и в группе симметрий додекаэдра и икосаэдра?

(б) Докажите, что группа вращений додекаэдра изоморфна A_5 .

(в) Верно ли, что группа симметрий додекаэдра изоморфна S_5 ?