Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 1.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Вычислите (то есть представьте в виде $a + bi$ для вещественных a и b):
(а) $(1+i)^8$; (б) $\frac{1}{3+4i}$.

Задача 2. Нарисуйте на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:
(а) $\mathrm{Re}\, z = 1$; (б) $|z = 3|$; (в) $\mathrm{Re}\, z \geq 1$, $\mathrm{Im}\, z \geq 2$, $|z| \leq 3$.

Задача 3. Для комплексного числа z определим преобразование плоскости M_z таким образом: каждая точка w переходит в точку $z \cdot w$.

(а) Во сколько раз преобразование M_z для $z = 1 - \sqrt{3}i$ увеличивает расстояния на комплексной плоскости?

(б) Докажите, что M_z при $z \neq 0$ является преобразованием подобия, то есть увеличивает все расстояния в одинаковое число раз.

(в) Пусть $|z| = 1$. Докажите, что в этом случае преобразование M_z является поворотом. На какой угол?

Задача 4. (а) Проверьте, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

(б) Выведите из пункта (а) формулу для $\cos(\varphi + \psi)$ и $\sin(\varphi + \psi)$.

Задача 5 (Формула Муавра)**.** Выпишите формулу для комплексных корней степени n из единицы, используя тригонометрическую форму комплексного числа. Получите явную формулу (в радикалах), когда $n = 3$, 4, 5.

Задача 6. Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$
(1) из $a > b$ следует $a + c > b + c$; (2) из $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $ab > 0$.)

Задача 7. (а) Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке z_0 и проходящими через точки z_1 и z_2, равен аргументу отношения $V(z_2, z_1, z_0) := \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$.

(б) Докажите, что четыре точки z_0, z_1, z_2 и z_3 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только когда их *двойное отношение*

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}$$

является вещественным числом.

Задача 8. (а) На комплексной прямой в точках $z_1, \ldots, z_n$ находятся n планет одинаковой массы. Докажите, что точки z, в которых силы тяготения этих планет уравновешиваются, являются корнями уравнения $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Напомним, что на плоскости сила тяготения убывает пропорционально расстоянию.

(б) (Проблема Максвелла) Доказать, что у системы планет из пункта (а) не более $n-1$ точки равновесия, причем оценка $n-1$ точная. Замечание: аналогичный вопрос для трехмерного пространства – известная открытая проблема.

(в) (Теорема Гаусса–Лукаса) Корни производной комплексного многочлена $f(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n)$ лежат в выпуклой оболочке $z_1, \ldots, z_n$. Напомним, что выпуклая оболочка – наименьший многоугольник, содержащий $z_1, \ldots, z_n$.

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 1. Срок сдачи 17 сентября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Вычислите
$$\frac{(1+i\sqrt{3})^{2018}}{(1+i)^{4024}}.$$

Задача 2. Нарисуйте на плоскости множество точек z, удовлетворяющих уравнению
$$|z-1| = 2|z+1|.$$

Задача 3. Докажите, что всякое комплексное число является квадратом некоторого комплексного числа.

Задача 4. Найдите все комплексные решения уравнения
$$x^5 - 1 = 0.$$

Задача 5. Умножение на комплексное число z задаёт преобразование плоскости
$$M_z : w \mapsto z \cdot w.$$
Представьте M_{1+i} в виде композиции поворота и гомотетии.