Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Листок 1.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 2. Можно ли ввести на комплексных числах отношение порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$
(1) из $a > b$ следует $a + c > b + c$; (2) из $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $ab > 0$.)

Задача 3. а) Докажите, что существует многочлен T_n, такой что $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва первого рода*).

б) Докажите, что существует многочлен U_n, такой что $\sin(nx) = \sin(x)U_{n-1}(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва второго рода*).

Задача 4. (а) Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке z_0 и проходящими через точки z_1 и z_2, равен аргументу отношения $V(z_2, z_1, z_0) := \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$.

(б) Докажите, что четыре точки z_0, z_1, z_2 и z_3 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только когда их *двойное отношение*

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}$$

является вещественным числом.

Задача 5. (а) На комплексной прямой в точках $z_1, \ldots, z_n$ находятся n планет одинаковой массы. Докажите, что точки z, в которых силы тяготения этих планет уравновешиваются, являются корнями уравнения $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Напомним, что на плоскости сила тяготения убывает пропорционально расстоянию.

(б) (Проблема Максвелла) Доказать, что у системы планет из пункта (а) не более $n-1$ точки равновесия, причем оценка $n-1$ точная. Замечание: аналогичный вопрос для трехмерного пространства – известная открытая проблема.

(в) (Теорема Гаусса–Лукаса) Корни производной комплексного многочлена $f(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n)$ лежат в выпуклой оболочке $z_1, \ldots, z_n$. Напомним, что выпуклая оболочка – наименьший многоугольник, содержащий $z_1, \ldots, z_n$.

Задача 6. Сформулируйте и докажите трёхмерный аналог теоремы Шаля.

Задача 7. Будем рассматривать трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ как часть четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, состоящую из точек с координатами $(x, y, z, 0)$.

(а) Как нужно повернуть этот листок в $\mathbb{R}^4$, чтобы шрифт изменился на зеркальный?

(б) Докажите, что левый ботинок из $\mathbb{R}^3$ можно так повернуть в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ он станет правым ботинком.

(в) Докажите, что два зацепленных звена цепи в $\mathbb{R}^3$ можно так подвигать в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ они окажутся незацепленными.