Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Задачи для подготовки к контрольной.

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Алгоритм Евклида

Задача 1. Птицефабрика фасует яйца в коробки, рассчитанные либо на дюжину[1] яиц, либо на 25 яиц. Сможет ли птицефабрика отсчитать покупателю ровно 401 яйцо, используя только такие коробки? Предполагается, что в каждой коробке лежит ровно столько яиц, на сколько она рассчитана.

Задача 2. Найдите все решения в целых числах диофантова уравнения

$$16x + 27y = 214.$$

Задача 3. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^{30} - 1$ и $x^8 - 1$.

Задача 4 (Китайская теорема об остатках)**.** Найдите все решения системы сравнений

$$x \equiv 5 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 3 \pmod{15}.$$

Задача 5. Найдите натуральное число x, не превосходящее 120, такое что

$$x \equiv 1 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 5, \quad x \equiv 0 \pmod 3.$$

Задача 6. Найдите квадратный многочлен f с рациональными коэффициентами, такой что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 20, \quad f(3) = 200.$$

Задача 7. Решите сравнение

$$100x \equiv 999 \pmod{1001}.$$

Задача 8. Решите уравнения в целых числах.

(а) $173x + 95y = 7$; (б) $57x + 102y = 3$; (в) $91x + 1001y = 6$.

Задача 9. Решите уравнения в натуральных числах.

(а) $173x + 95y = 20000$; (б) $57x + 102y = 10000$.

Задача 10. Найдите многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени не выше трёх, значения которого в точках 0, 1, 2 и 3 совпадают со значениями функции

$$\text{(а)}2^x; \quad \text{(б)}\frac{1}{x+1}; \quad \text{(в)}\sin(\frac{\pi x}{2}).$$

Задача 11. Найдите такие рациональные числа a, b и c, что

$$\frac{1}{(2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

[1] Дюжина — это 12, гросс — это 12^2, а масса — это 12^3 (по-видимому, именно в этом смысле слово масса вошло в идиомы “масса народа” или “масса дел”). Раньше двенадцатеричная система счисления была довольно популярна.

2. Углы и длины

Задача 12. (а) На лекции мы определили косинус угла φ между векторами $u = (x_1, y_1)$ и $v = (x_2, y_2)$ в $\mathbb{R}^2$ следующей формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{|u||v|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Также мы определили ориентированную площадь $\omega(u, v)$ параллелограмма, натянутого на векторы u и v формулой:

$$\omega(u,v) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Выполняется ли при таких определениях следующая формула для площади из школьной геометрии:

$$\omega(u,v) = |u||v|\sin\varphi?$$

(б) Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца в $\mathbb{R}^2$:

$$|(\overline{u},\overline{v})| \leq |\overline{u}||\overline{v}|.$$

Задача 13. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ — гиперплоскость, натянутая на векторы $(1,2,3,1)$, $(1,2,3,2)$ и $(1,1,1,1)$.

(а) Найдите вектор единичной длины, перпендикулярный гиперплоскости Π.

(б) Найдите расстояние от точки $(6,3,6,5) \in \mathbb{R}^4$ до гиперплоскости Π.

(в) Найдите длину ортогональной проекции вектора $(6,3,6,5)$ на гиперплоскость Π.

Задача 14. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 15. В координатном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ найдите матрицу поворота:

(а) на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x = y = z\}$;

(б) на угол φ относительно прямой $\{x = y = z\}$;

(в) на угол φ относительно прямой $\{x = py = qz\}$, где $p, q \neq 0$.

3. Арифметика

Задача 16. (а) Докажите, что число вида $4k+3$ не представляется в виде суммы двух полных квадратов ни для какого натурального k.

(б) Докажите, что если целые числа m и n представляются в виде суммы двух полных квадратов, то их произведение mn тоже представляется в виде суммы двух полных квадратов (и даже двумя способами).

Задача 17. Для каких остатков a по модулю p сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

разрешимо в целых числах, если p равно

(а) 5, (б) 13, (в) 23?

Задача 18. Докажите, что если p — простое число, то сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

разрешимо в целых числах ровно для половины всех ненулевых остатков a по модулю p.

Задача 19. Докажите, что сравнение
$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \mod p$$
имеет нетривиальное решение в целых числах (*тривиальное решение* — это решение $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \mod p$).

Задача 20. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в целых числах тогда и только тогда, когда $p \equiv 3 \mod 4$.

Задача 21. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 22. (а) Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то n обязательно является простым числом. (Простые числа вида $2^n - 1$ называются *простыми числами Мерсенна.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 23. (а) Докажите, что если число $2^n + 1$ простое, то n обязательно является степенью двойки, то есть, $n = 2^m$ для некоторого натурального m. (Простые числа вида $2^{2^m} + 1$ называются *простыми числами Ферма.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 24. Пусть p — простое число.

(а) Докажите “тождество ленивого школьника”:
$$(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p.$$

(б) Докажите малую теорему Ферма: $n^p - n$ делится на p для любого натурального n.

(в) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

Задача 25. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ — различные простые числа. Докажите, что сравнение
$$p^x + q^y \equiv 1 \pmod{pq}$$
разрешимо в натуральных числах.

Задача 26. Существуют ли такие иррациональные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что α^β рационально?

4. Комплексные числа

Задача 27. Представьте следующие комплексные числа в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$.
$$\text{(а)}\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}; \qquad \text{(б)}\ \sqrt{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}; \qquad \text{(в)}\ \sqrt{1 + i\sqrt{3}}.$$

Задача 28. Найдите все комплексные решения уравнения

(а)$z^3+3z^2+3z+3 = 0$; (б) $z^4+4 = 0$; (в) $(z+i)^4 = (z-i)^4$; (г) $z^4+(z-4)^4 = 32$.

Задача 29. Найдите сумму квадратов длин всех диагоналей в правильном семиугольнике, вписанном в единичную окружность (сторона не считается диагональю).

Задача 30. Докажите, что число $\frac{2+i}{2-i}$ не является корнем n-ой степени из единицы ни для какого натурального n.

5. Кольца и поля

Задача 31. *Полем из трёх элементов* называется множество из трёх элементов (обозначим их через 0, 1 и 2) с операциями сложения и умножения, заданными следующими таблицами:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Проверьте ассоциативность и дистрибутивность этих операций. Проверьте, что из каждого элемента можно вычесть любой другой элемент, и каждый элемент можно поделить на любой другой ненулевой элемент.

Задача 32. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков 0, 1, 2, 3, 4 при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$a + b = (a + b) \pmod 5,$$

$$ab = ab \pmod 5,$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{Z}$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 33. Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1 = 0$. Докажите или опровергните: уравнение $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = a$ будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого нечётного натурального n. (Предупреждение: тождество $1 + 1 = 0$ выполнено не только в поле из двух элементов, поэтому разбор примера $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ не является полным решением.)

Задача 34. Пусть в поле $\mathbb{F}$ тождество $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0$ не выполнено ни для какого натурального n. Докажите или опровергните: уравнение

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = a$$

будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого натурального n.

Задача 35 (Единственность нуля)**.** Докажите, что в кольце не может быть двух различных нулевых элементов, то есть элементов 0, для которых выполнено тождество $0 + a = a$. Доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 36. Докажите, что в каждом кольце выполняются тождества:

$$\text{(а) } a \cdot 0 = 0; \quad \text{(б) } -a = (-1) \cdot a; \quad \text{(в) } (-a) \cdot b = (-ab).$$

Как и прежде, доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 37 (Делители нуля)**.** (а) Докажите, что если

$$ab = 0$$

для двух элементов a и b поля, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.

(б) Приведите пример кольца, в котором есть делители нуля, то есть, два ненулевых элемента a и b, таких что $ab = 0$.

6. Группы движений и перестановок

Задача 38. (а) Разложите перестановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

в произведение непересекающихся циклов.

(б) Найдите знак перестановки σ.

(в) Вычислите σ^{2018}.

Задача 39. (а) Опишите все перестановки в S_n, которые могут быть разложены в произведение (возможно пересекающихся) циклов длины три.

(б) При каких k в группе S_n найдётся перестановка с числом инверсий равным k?

Задача 40. (а) Опишите все повороты и отражения в группе симметрий правильного n-угольника при $n \geq 2$ (эта группа называется *группой диэдра* и обозначается D_n).

(б) Занумеруем вершины правильного n-угольника числами от 1 до n против часовой стрелки. Используя эту нумерацию, сопоставьте каждому движению из D_n перестановку из S_n. Каким перестановкам из S_n соответствуют повороты и отражения из пункта (а)? Чему равны знаки этих перестановок?

(в) При каких n отображение $D_n \to S_n$ из пункта (б) является взаимно-однозначным? Инъективным? Сюръективным?

Задача 41. (а) Докажите, что группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4.

(б) Какие перестановки вершин тетраэдра можно получить с помощью вращений тетраэдра?

(в) Докажите, что группа вращений правильного тетраэдра изоморфна A_4.

Задача 42. (а) Какие перестановки пространственных диагоналей куба можно получить с помощью вращений куба?

(б) Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4.

Задача 43. (а) Придумайте такое сюръективное отображение $\varphi : S_4 \to S_3$, чтобы для любых двух перестановок выполнялось тождество $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$. (Иными словами, φ должно быть *гомоморфизмом*.)

(б) Найдите прообраз $\varphi^{-1}(\mathrm{id})$ единичной перестановки.

Задача 44. Существует ли сюръективный гомоморфизм $S_4 \to D_2$?

Задача 45. (а) Пусть G — конечная подгруппа группы движений плоскости. Докажите, что все элементы $g \in G$ имеют общую неподвижную точку x (то есть $g(x) = x$ для каждого $g \in G$).

(б) Классифицируйте все конечные подгруппы в группе движений плоскости.

7. Многочлены

Задача 46. Примените решето Эратосфена, чтобы найти все неприводимые многочлены степени не выше четырёх с коэффициентами в поле из двух элементов.

Задача 47. (а) Докажите для любого заданного поля $\mathbb{F}$, что существует бесконечно много неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из $\mathbb{F}$.

(б) Классифицируйте все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. (Подсказка: используйте основную теорему алгебры.)

(в) Приведите пример неприводимого многочлена степени 5 над полем из двух элементов.

(г) Докажите, что над полем из двух элементов существует неприводимый многочлен любой заданной степени.

Задача 48. Разложите на неприводимые множители в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен

$$x^4 + 4x^2 + x + 6.$$

8. Целые гауссовы числа

Задача 49. Разложите 30 на простые множители в кольце целых гауссовых чисел.

Задача 50. Какие из простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 останутся простыми в кольце $\mathbb{Z}[i]$?

Задача 51. Пусть γ — целое гауссово число. Введём отношение эквивалентности $\sim_\gamma$ на $\mathbb{Z}[i]$ по правилу: $z \sim_\gamma w$, если $z - w$ делится на γ.

(а) Нарисуйте по одному представителю для каждого класса эквивалентности при $\gamma = 2, 3$ и 5.

(б) Найдите число классов эквивалентности при $\gamma = 3 - 2i$.

9. Матрицы и системы линейных уравнений

Задача 52. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^n$$

для всех натуральных n.

Задача 53. Приведите к стандартному ступенчатому виду “таблицу умножения”, то есть, матрицу 10×10, у которой на (i, j)-том месте стоит ij.

Задача 54. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача 55. (а) Докажите, что если $m \times n$-матрица A получается из матрицы A' элементарными преобразованиями строк, то системы из m однородных линейных уравнений на n неизвестных $AX = 0$ и $A'X = 0$ эквивалентны (то есть имеют одно и то же множество решений).

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для систем неоднородных линейных уравнений.

Задача 56. Найдите линейную зависимость между строками матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 57. Докажите, что если $m \times n$-матрица A' получается из матрицы A заменой i-той строки на сумму i-той и j-той строки, то $A' = (I_m + E_m^{ij})A$, где I_m — единичная $m \times m$-матрица, а E_m^{ij} — матрица того же размера с единственным ненулевым элементом (равным 1) на (i, j)-том месте.

10. Векторные пространства и линейные операторы

Задача 58. Какие из следующих подмножеств являются вещественными подпространствами в $\mathbb{R}[x]$?

(а) $\{f \mid f(1)=2\}$ (б) $\{f \mid f(1)=0\}$ (в) $\{f \mid f$ делится на $(x^2+1)\}$

Задача 59. Какие из следующих подмножеств являются комплексными подпространствами в $\mathbb{C}^2$?

(а) $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$ (б) $\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x=y\}$

Задача 60. Являются ли линейно зависимыми над $\mathbb{R}$ векторы

(а) $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,3,4)\in\mathbb{R}^3$? (б) $(1,2,3,5)$, $(2,3,5,8)$, $(3,4,7,11)\in\mathbb{R}^4$?

Задача 61. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в пространстве всех кососимметрических $n\times n$-матриц с вещественными коэффициентами.

Задача 62. Можно ли представить $\sqrt[3]{4}$ как линейную комбинацию $a+b\sqrt[3]{2}$, где a и b — рациональные числа?

Задача 63. Представляется ли многочлен $1+x+x^2+x^3$ в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами многочленов

(а) $x+1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$? (б) $x-1$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$?

Задача 64. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0,1]$.

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 65. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

(а) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt{2}$, $1/(\sqrt{2}-1)$?

(б) Выразите вектор $(1+\sqrt{2})/(3-2\sqrt{2})$ как линейную комбинацию векторов 1 и $\sqrt{2}$.

(в) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt[3]{2}$, $1/(\sqrt[3]{2}-1)$?

(г) Можно ли выразить вектор $1/(\sqrt[3]{2}-1)$ как линейную комбинацию векторов 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}^2$?

Задача 66. Чему равна размерность поля комплексных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над полем

(а) рациональных чисел; (б) вещественных чисел; (в) комплексных чисел?

Задача 67. Пусть $\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, если:

(а) x^2-2; (б) x^3-2; (в) x^4+4; (г) x^4+1; (д) x^4-2.

Задача 68. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Найдите число всех подпространств в координатной плоскости $\mathbb{F}_q^2$.

11. Линейные операторы

Задача 69. (а) Покажите, что векторы 1 и i образуют базис в поле комплексных чисел, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(б) Выпишите матрицу оператора умножения на комплексное число $a+bi$ в базисе $\{1,i\}$.

Задача 70. Найдите два линейных оператора T и U на $\mathbb{R}^2$, такие что $TU = 0$, но $UT \neq 0$.

Задача 71. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(x + a).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 72. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$), если:

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$; (д) $\alpha = \pi$

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 73. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)