Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 7. Алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите НОД (наибольший общий делитель) чисел:
(а) $m = 20$, $n = 13$; (б) $m = 126$, $n = 91$ (в) $m = 77695236973$, $n = 6003722857$.

Задача 2. Для каждой пары чисел m и n из предыдущей задачи найдите все такие целые x и y, что

$$mx + ny = \text{НОД}(m, n).$$

Задача 3. Какой цифрой заканчивается число 2017^{2018}?

Задача 4. (а) Разложите на простые множители числа 111, 1111, 8051, 11111, 111111.
(б) Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Задача 5. (а) Докажите, что ни одно из чисел $4k+3$ нельзя представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.
(б) Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 6. (а) Докажите, что простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.
(б) Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

Задача 7. (а) Докажите малую теорему Ферма: если p — простое число, то $n^p - n$ делится на p для любого натурального n.
(б) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

Задача 8. (а) Докажите китайскую теорему об остатках: если p и q два взаимно простых числа, то остаток целого числа x при делении на pq однозначно определяется его остатками $x \pmod p$ и $x \pmod q$ при делении на p и q, соответственно.
(б) Предложите алгоритм вычисления $x \pmod{pq}$ по $x \pmod p$ и $x \pmod q$.

Задача 9. Определим функцию Эйлера $\varphi(n)$ от натурального аргумента n, как число остатков по модулю n, которые взаимно просты с n.
(а) Вычислите $\varphi(p)$ и $\varphi(pq)$, где p и q — простые числа.
(б) Докажите, что если m и n взаимно просты, то

$$\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(mn).$$

Задача 10. (а) Вычислите $\varphi(p^k)$ для всех простых чисел p и натуральных k.
(б) Пусть $n = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$ — разложение натурального числа n на простые множители. Выразите $\varphi(n)$ через $p_1, \ldots, p_l$ и $k_1, \ldots, k_l$.

Задача 11. (а) Докажите теорему Эйлера (обобщение малой теоремы Ферма): для любой пары взаимно простых натуральных чисел a и n число $n^{\varphi(a)} - 1$ делится на a.
(б) Для каких чисел a справедливо более общее утверждение: $n^{\varphi(a)+1} - n$ делится на a для любого натурального n?

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 4. Срок сдачи 8 октября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите все решения в целых числах диофантова уравнения

$$16x + 27y = 1.$$

Задача 2. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 999999$$

не имеет решений в целых числах.

Задача 3. Найдите такое натуральное число a, что его степени a, a^2, a^3,..., a^{17} дают все возможные ненулевые остатки при делении на 17.

Задача 4. Используя, что

$$718865222040754575648532881408 = x^{13}$$

для некоторого целого x, найдите x без калькулятора.

Задача 5. Докажите, что уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$ не имеет решений в целых числах.