Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 8. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Нарисуйте все гауссовы целые числа, которые делятся на $1+i$ и не превосходят по модулю 5.

(б) Найдите все обратимые гауссовы целые числа.

(в) Найдите наибольший общий делитель гауссовых целых чисел $11+7i$ и $18-i$ в кольце $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 2. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^3-6x^2+14x-15$ и $x^3-8x^2+21x-18$ в кольце $\mathbb{R}[x]$.

Задача 3 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** (а) Напишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

(б) Парабола на плоскости задана уравнением $y = ax^2+bx+c$ и проходит через точки $(1,2)$, $(2,4)$ и $(3,4)$. Найдите a, b и c.

(в) На плоскости даны точки (x_1, y_1),..., (x_n, y_n) (можно считать, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$). Найдите полиномиальную функцию степени не выше n, график которой проходит через данные точки.

Подсказка: нужно применить китайскую теорему об остатках к линейным многочленам $(x-x_1)$,..., $(x-x_n)$ и остаткам y_1,..., y_n то есть найти многочлен f, удовлетворяющий сравнениям $f \equiv y_1 \mod (x-x_1)$,..., $f \equiv y_n \mod (x-x_n)$.

Задача 4. Какие из простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 останутся простыми в кольце $\mathbb{Z}[i]$?

Определение 1. *Кольцо $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ гауссовых вычетов по модулю p — это множество классов эквивалентности гауссовых целых чисел относительно следующего отношения эквивалентности: $z \sim w$, если $z-w$ делится на p. Сложение и умножение в этом кольце определяются через сложение и умножение в кольце $\mathbb{Z}[i]$.*

Задача 5. (а) Нарисуйте по одному представителю для каждого класса эквивалентности из $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ при $p = 2, 3$ и 5.

(б) Сколько элементов в $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$?

Задача 6. Найдите все обратимые элементы в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{F}[[x]]$ (через $\mathbb{F}$ обозначается произвольное поле).

Задача 7. Назовём два простых элемента в кольце *существенно различными*, если один не получается из другого умножением на обратимый элемент кольца. Докажите или опровергните:

`В кольце` $\mathbb{F}[[x]]$ `бесконечно много существенно различных простых элементов.`

Почему доказательство Евклида бесконечности множества существенно простых чисел в $\mathbb{Z}$ не применимо в этом случае?

Задача 8. Докажите эквивалентность следующих трёх утверждений:

(1) Кольцо $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ является полем.

(2) Уравнение $x^2+y^2=p$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$.

(3) Сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$.

Задача 9. Какие натуральные числа представимы в виде суммы двух полных квадратов?