Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 9. Алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Если не оговорено обратное, то все векторные пространства и уравнения рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Задача 1. (а) Найдите все решения уравнения $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$.

(б) Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 4y + z = 3 \end{cases}.$$

Определение 1. *Назовём ступенчатую матрицу стандартной, если*

(1) *каждая ненулевая строка начинается с 1 (ведущая единица),*

(2) *в столбце, содержащем ведущую единицу, нет других ненулевых элементов.*

Задача 2. (а) Приведите матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

к стандартному ступенчатому виду.

(б) Решите систему уравнений:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(в) Найдите линейную зависимость между векторами $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 6)$, $v_3 = (3, 6, 11)$, $v_4 = (4, 9, 8)$ в $\mathbb{R}^3$.

(г) Выразите каждый из векторов v_1, v_2, v_3, v_4 как линейную комбинацию остальных трёх векторов.

Задача 3. Докажите, что любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

Задача 4. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$.

(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?

(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 5. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.

(а) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt{2}$, $1/(\sqrt{2} - 1)$?

(б) Выразите вектор $(1 + \sqrt{2})/(3 - 2\sqrt{2})$ как линейную комбинацию векторов 1 и $\sqrt{2}$.

(в) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt[3]{2}$, $1/(\sqrt[3]{2} - 1)$?

(г) Можно ли выразить вектор $1/(\sqrt[3]{2} - 1)$ как линейную комбинацию векторов 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}^2$?

Задача 6. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как вещественное векторное пространство.

(а) Представьте вектор x^3 как линейную комбинацию векторов 1, $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$.

(б) Можно ли представить вектор x^3 как линейную комбинацию векторов 1, $(x - 1)^2$, $(x - 2)^3$?

Задача 7. Сколько существует стандартных ступенчатых матриц размера 2×3, все элементы которых равны 0 или 1?

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ, ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2018 Г.

Домашнее задание 5. Срок сдачи 15 октября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите линейную зависимость между векторами $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 6, 11)$ и $(2, 5, 8)$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 2. Докажите, что если два вектора линейно зависимы, то один из них равен другому, умноженному на скаляр.

Задача 3. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как вещественное векторное пространство. Представьте вектор x^4-4x^3+3 как линейную комбинацию векторов $(x-1)$, $(x-1)^2$, $(x-1)^4$.

Задача 4. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Являются ли векторы 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ линейно зависимыми?

Задача 5. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем из двух элементов, а $v \in V$ — ненулевой вектор. Найдите количество таких векторов $u \in V$, что u и v линейно независимы.