Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 10. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. В векторном пространстве даны несколько линейно зависимых векторов. Докажите, что один из этих векторов представляется в виде линейной комбинации остальных векторов.

Задача 2. Лебедь, рак и щука тянут воз вдоль векторов $(1,-1,2)$, $(-2,1,-1)$ и $(1,1,-4)$, соответственно. Чему должны быть равны приложенные силы по абсолютной величине, чтобы воз был и ныне там?

Задача 3. Обозначим через $0_{\mathbb{F}}$ нулевой элемент поля $\mathbb{F}$, а через 0_V нулевой вектор векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$. Выведите из аксиом векторного пространства, что $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$ для всех векторов $v \in V$.

Определение 1. *Линейно независимый набор векторов $e_1, \ldots, e_n$ в векторном пространстве V называется базисом, если каждый вектор $v \in V$ представляется в виде линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_n$. Коэффициенты в разложении $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ называются координатами вектора v.*

Задача 4. Постройте базис в векторном пространстве V, где V — это

(а) пространство $m \times n$ матриц с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$;

(б) пространство многочленов с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$ степени не выше n;

(в) поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, как векторное пространство над $\mathbb{R}$;

(г) поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, как векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Задача 5. Докажите, что набор векторов $e_1, \ldots, e_n$ в векторном пространстве V образует базис тогда и только тогда, когда для каждого вектора $v \in V$ существует единственное разложение $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Задача 6. Выпишите матрицу оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше 3 в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Задача 7 (Лемма Штейница)**.** В векторном пространстве даны линейно независимый набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ и порождающий набор векторов $w_1, \ldots, w_m$. Докажите, что $n \le m$, и векторы $w_1, \ldots, w_m$ можно так перенумеровать, что $v_1, \ldots, v_n, w_{n+1}, \ldots, w_m$ тоже будет порождающим набором.

Задача 8. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$), если:

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$.

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 9 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a))$.

Задача 10 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n))$.