Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Решения контрольной 22 октября: Вариант I

Факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Фальшивомонетчик напечатал по сотне купюр достоинством в 9 и 13 долларов. Сколькими способами он сможет заплатить без сдачи 500 долларов?

Решение. Нам нужно найти количество целых неотрицательных решений уравнения

$$9x + 13y = 500. \tag{1}$$

Можно упростить задачу, поделив 500 с остатком на 9:

$$9x + 13y = 9 \cdot 55 + 5,$$

и сделав замену $x' = x - 55$. Получаем уравнение

$$9x' + 13y = 5. \tag{2}$$

Найдём частное решение этого уравнения. Для этого сначала найдём с помощью алгоритма Евклида частное решение уравнения

$$9a + 13b = 1,$$

например, $a = 3$, $b = -2$. Тогда $x' = 5a = 15$, $y = 5b = -10$ — решение уравнения (2). Следовательно, $x = x' + 55 = 70$, $y = -10$ — решение уравнения (1). Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$x = 70 - 13k, \quad y = -10 + 9k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $x \geq 0$ при $k \leq 5$, а $y \geq 0$ при $k \geq 2$. Получаем, что k может принимать 4 значения: 2, 3, 4, 5.

Также заметим, что необязательно проверять условие $x \leq 100$, $y \leq 100$ (хотя нам и сказано в задаче, что купюр каждого достоинства не больше ста). Фальшивомонетчику заведомо понадобится меньше сотни купюр, чтобы заплатить без сдачи 500 рублей, так как $9 \cdot 100 > 500$ и $13 \cdot 100 > 500$.

Ответ: 4

Задача 2. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, порождённая векторами $(1, 1, -2)$ и $(3, -4, 1)$.

(а) Задайте плоскость Π уравнением.

(б) Найдите длину ортогональной проекции вектора $(1, 2, 3)$ на плоскость Π.

Решение. (а) Уравнение плоскости в трёхмерном векторном пространстве с координатами x, y, z имеет вид $ax + by + cz = 0$. Свободный член равен нулю, потому что все подпространства в векторном пространстве по определению содержат нулевой вектор, то есть начало координат. Подставляя вместо (x, y, z) векторы $(1, 1, -2)$ и $(3, -4, 1)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 3a - 4b + c = 0 \end{cases}$$

Решая систему методом Гаусса, получаем $a = b = c$. Тем самым, в качестве уравнения плоскости можно взять уравнение $x + y + z = 0$ (или любое другое ему пропорциональное).

(б) Чтобы найти ортогональную проекцию вектора $v = (1,2,3)$ на плоскость Π, нужно представить v в виде суммы векторов:

$$v = u + n,$$

где $u \in \Pi$, а n ортогонален Π. Тогда u по определению будет ортогональной проекцией. В частности, n ортогонален u, поэтому векторы v, n и u образуют прямоугольный треугольник, в котором длины катетов равны $|u|$ и $|n|$, а длина гипотенузы равна $|v|$. Нам из пункта (а) известен косинус угла φ между векторами v и n, поскольку вектор n пропорционален вектору $n_0 = (1,1,1)$. Тем самым, мы знаем длину гипотенузы и острый угол в прямоугольном треугольнике, а следовательно можем вычислить и длины катетов.

$$|u|^2 = |v|^2 - |n|^2 = |v|^2 - (\cos\varphi |v|)^2 = |v|^2(1-\cos^2\varphi) = |v|^2\left(1-\frac{(v,n_0)^2}{|v|^2|n_0|^2}\right) = |v|^2 - \frac{(v,n_0)^2}{|n_0|^2}.$$

Подставляя $|v| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$, $(v,n_0) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 6$, $|n_0| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ получаем:

$$|u|^2 = 14 - \frac{6^2}{3} = 2.$$

Ответ: (а) $x+y+z=0$, (б) $\sqrt{2}$

Задача 3. (а) Разложите перестановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

в произведение непересекающихся циклов.

(б) Найдите знак перестановки σ.

Решение. (а) $\sigma = \tau_1\tau_2\tau_3$ где $\tau_1 = (1\ 3\ 4)$ — 3-цикл, $\tau_2 = (2\ 10\ 5\ 6)$ — цикл длины 4, и $\tau_3 = (7\ 8\ 9)$ — 3-цикл.

(б) Знак произведения перестановок равен произведению их знаков, а знак цикла длины ℓ равен $(-1)^{\ell-1}$. Получаем $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau_1)\cdot\operatorname{sgn}(\tau_2)\cdot\operatorname{sgn}(\tau_3) = 1\cdot(-1)\cdot 1 = -1$.

Ответ: (а) $(1\ 3\ 4)(2\ 10\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$, (б) -1

Задача 4. (а) Покажите, что векторы 1 и i образуют базис в поле комплексных чисел, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(б) Выпишите матрицу оператора умножения на комплексное число $3+4i$ в базисе $\{1, i\}$.

Решение. (а) По определению комплексное число $a+bi$ — это упорядоченная пара вещественных чисел. Поэтому любое комплексное число представляется единственным образом в виде $a\cdot 1 + b\cdot i$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Это и означает, что 1 и i образуют базис в $\mathbb{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(б) Оператор умножения на $3+4i$ переводит 1 в $(3+4i)\cdot 1 = 3+4i$ и переводит i в $(3+4i)\cdot i = -4+3i$. Поэтому его матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как вещественное векторное пространство. Представьте вектор x^3+1 как линейную комбинацию векторов $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-3)$, $(x-2)(x-3)$ и $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Решение. Сравнивая коэффициенты при x^3 у вышеприведённых многочленов, получаем что $(x-1)(x-2)(x-3)$ войдёт с коэффициентом 1 в представление x^3+1 в виде линейной комбинации. Осталось представить многочлен второй степени $f = x^3+1-(x-1)(x-2)(x-3)$ в виде линейной комбинации многочленов $f_1 = (x-2)(x-3)$, $f_2 = (x-1)(x-3)$, $f_3 = (x-1)(x-2)$. Согласно интерполяционной формуле Лагранжа, многочлены $\frac{1}{2}f_1$, $-f_2$, $\frac{1}{2}f_3$ образуют такой базис в пространстве многочленов степени не выше два, что координаты многочлена f в этом базисе — это его значения $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$. Отсюда немедленно получаем:

$$f = f(1)\frac{f_1}{2} - f(2)f_2 + f(3)\frac{f_3}{2} = f_1 - 9f_2 + 14f_3.$$

Ответ: $14(x-1)(x-2) - 9(x-1)(x-3) + (x-2)(x-3) + (x-1)(x-2)(x-3)$.

Задача 6. Пусть $\mathbb{F}_3$ — поле из трёх элементов. Найдите число прямых в координатной плоскости $\mathbb{F}_3^2$. (Прямая — это векторное подпространство размерности один.)

Решение. Решим более общую задачу: найдём количество одномерных подпространств в координатном векторном пространстве размерности n над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов.

Одномерное пространство порождается единственным ненулевым вектором и однозначно определяется этим вектором (заметим, что нулевой вектор по определению лежит в каждом векторном подпространстве). По определению векторы в $\mathbb{F}_q^n$ — это наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ лежат в $\mathbb{F}_q$. Следовательно, всего векторов q^n, а ненулевых векторов всего $q^n - 1$.

Два ненулевых вектора v_1 и v_2 порождают одно и то же одномерное подпространство тогда и только тогда, когда они пропорциональны, то есть $v_1 = av_2$, где $a \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$. Таким образом, все ненулевые векторы разбиваются на классы пропорциональных векторов (порождающих одну и ту же прямую), и в каждом классе ровно $|\mathbb{F} \setminus \{0\}| = q - 1$ элемента. Следовательно, всего одномерных подпространств $\frac{q^n-1}{q-1}$.

Ответ: 4.