Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 17. Алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. *Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Функция от двух аргументов $f : V \times V \to \mathbb{F}$ (сопоставляющая паре векторов u, $v \in V$ скаляр $f(u, v) \in \mathbb{F}$) называется билинейной формой, если она линейна по каждому аргументу, то есть:*

$$f(u + \lambda u', v) = f(u, v) + \lambda f(u', v), \quad f(u, v + \lambda v') = f(u, v) + \lambda f(u, v')$$

для всех векторов u, v, u', $v' \in V$ и скаляров $\lambda \in \mathbb{F}$.

Форма называется симметричной, если $f(u, v) = f(v, u)$, и кососимметричной, если $f(u, v) = -f(v, u)$, для всех пар векторов u, $v \in V$.

Задача 1. (а) Докажите, что если $1 + 1 \neq 0$ в $\mathbb{F}$ (иными словами, характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна двум), то форма f кососимметрична тогда и только тогда, когда $f(v, v) = 0$ для всех $v \in V$.

(б) Приведите контрпример к пункту (а) в случае, когда $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 2$.

Задача 2. (а) Какие из следующих билинейных форм на $\mathbb{R}^2$ являются симметричными? А какие — кососимметричными? Через (u_1, u_2) и (v_1, v_2), соответственно, обозначены координаты векторов u, $v \in \mathbb{R}^2$.

(1) $f(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1$; (2) $f(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2$; (3) $f(u, v) = u_1v_2 + 2u_2v_1$.

(б) Каков геометрический смысл форм (1) и (2) из пункта (а)?

Определение 2. *Функция $q : V \to \mathbb{F}$ от одного аргумента называется квадратичной формой, если в координатах $(x_1, \dots, x_n)$ относительно какого-либо базиса она представляется в виде однородного многочлена от $x_1, \dots, x_n$ степени 2.*

Задача 3 (Коники)**.** Докажите, что любая ненулевая квадратичная форма на $\mathbb{R}^2$ заменой координат приводится к одной из следующих канонических форм:

(1) $x_1^2 + x_2^2$; (2) $x_1^2 - x_2^2$; (3) $-x_1^2 - x_2^2$; (4) x_1^2; (5) $-x_1^2$.

Задача 4. Пусть $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Докажите, что каждая билинейная форма представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной форм, причём такое представление единственно.

Задача 5 (Поляризация)**.** (а) Докажите, что если $f(u, v)$ — симметричная билинейная форма на V, то функция $q(v) := f(v, v)$ является квадратичной формой.

(б) Пусть $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Докажите, что для каждой квадратичной формы q существует единственная симметричная билинейная форма f такая, что $q(v) = f(v, v)$. Билинейная форма f называется *поляризацией* квадратичной формы q.

(в) Найдите поляризацию квадратичной формы $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ на $\mathbb{R}^2$.

Задача 6. Докажите, что каждая квадратичная форма на $\mathbb{C}^n$ заменой координат приводится к сумме квадратов:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2,$$

причём количество квадратов k (называемое *рангом формы*) не зависит от выбора координат.