Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 19. Алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть $q(x, y) := ax^2 + bxy + cy^2$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^2$. При каких условиях на коэффициенты a, b, c

(а) форма обращается в нуль на ненулевом векторе;

(б) форма положительно определена, то есть $q(v) > 0$ для всех $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;

(в) форма отрицательно определена, то есть $q(v) < 0$ для всех $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

Задача 2. Существует ли линейная замена координат, переводящая квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ на $\mathbb{R}^3$ в квадратичную форму:

(а)
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2};$$

(б)
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3;$$

(в)
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)?$$

Задача 3. К какому максимально простому виду можно привести квадратичную форму на $\mathbb{R}^3$ линейной заменой координат?

Определение 1. *Матрицей Грама квадратичной формы q на n-мерном векторном пространстве с базисом $e_1, \ldots, e_n$ называется такая симметричная $n \times n$ матрица A, что для каждого вектора $v = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$ выполнено тождество:*
$$q(v) = x^tAx,$$
где через x обозначается столбец координат вектора v.

Задача 4. Найдите матрицы Грама квадратичной формы из задачи 1 и квадратичных форм из задачи 2 в стандартном базисе в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$, соответственно.

Задача 5. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ два базиса в одном и том же векторном пространстве, а C — матрица перехода между ними, а именно:
$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C.$$

(а) Обозначим через x столбец координат некоторого вектора в первом базисе, а через y — столбец координат этого же вектора во втором базисе. Докажите, что
$$y = C^{-1}x.$$

(б) Обозначим через A матрицу некоторой квадратичной формы в первом базисе, а через B — матрицу этой же формы во втором базисе. Докажите, что
$$B = C^tAC.$$

Определение 2. *Главным угловым минором M_k квадратной матрицы называется определитель её подматрицы, образованной пересечениями первых k строк и k столбцов.*

Задача 6. Вычислите все угловые миноры матриц Грама из задачи 4.

Задача 7 (Критерий Сильвестра)**.** Докажите, что квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$ положительно определена тогда и только тогда, когда все её главные угловые миноры положительны.