Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 18. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Во всех задачах дело происходит в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, и через $x_1,\ldots, x_n$ обозначены координаты в некотором ортонормированном базисе.

Задача 1. Найдите ортогональный базис в подпространстве:

(а) заданном уравнением $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

(б) порождённом векторами $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$;

(в) в ортогональном дополнении к предыдущему подпространству.

Задача 2. Найдите расстояние от точки $p = (2, 1, -3, 4)$ до плоскости $\Pi = \{2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0\}$

Задача 3. Найдите косинус угла между вектором $(1, 2, 3, 4)$ и подпространством $\{x + y + z + t = 1\}$.

Задача 4. Найдите расстояние между плоскостями $\Pi_1 = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 - 2 = 0,\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - 3 = 0,\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 - 3 = 0\}$; $\Pi_2 = (1, -2, 5, 8, 2) + \langle(0, 1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, -1, 1)\rangle$.

Задача 5. Существует ли линейное отображение из $\mathbb{R}^3$ в себя, переводящее сферу

$$\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

(а) в эллипсоид

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1;$$

(б) в квадрику

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1;$$

(в) в квадрику

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 1?$$

Задача 6 (Метод наименьших квадратов)**.** (а) Плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ натянута на векторы u_1 и u_2. Для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно лежащего в Π) найдите такую линейную комбинацию $v_0 = au_1 + bu_2$, что длина разности векторов $v - v_0$ минимальна.

(б) На плоскости даны n точек $p_1 = (x_1, y_1),\ldots, p_n = (x_n, y_n)$, где $x_1 < \ldots < x_n$. Найдите такую прямую $l = \{(x, y) \mid y = ax + b\}$, что сумма квадратов $(ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$ минимальна (иными словами, прямая l наименее уклоняется от точек $p_1,\ldots, p_n$).

Задача 7 (Аксиомы планиметрии)**.** Докажите, что евклидова аффинная плоскость удовлетворяет следующим свойствам (в частности, дайте строгие определения понятий “лежать между”, “полуплоскость”, “конгруэнтность отрезков и углов”):

(а) Для любых двух точек существует ровно одна прямая, их содержащая.

(б) Среди любых трёх точек прямой существует ровно одна точка, лежащая между двумя другими.

(в) Прямая делит плоскость на две полуплоскости так, что отрезок с концами в одной полуплоскости прямую не пересекает, а отрезок с концами в разных полуплоскостях — пересекает.

(г) На данной прямой от данной точки по данную сторону от неё можно отложить отрезок, конгруэнтный данному.

(д) От данного луча в данную полуплоскость можно отложить единственный угол, конгруэнтный данному.

(е) Признак равенства треугольников по трём сторонам.

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 10. Срок сдачи 3 декабря.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 в $\mathbb{R}^3$, если

$$l_1 = \{(-2,1,4) + t(0,2,-3) \mid t \in \mathbb{R}\}; \quad l_2 = \{(0,1,-4) + t(1,-2,6) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Задача 2. Найдите косинус угла между прямой l и плоскостью Π в $\mathbb{R}^3$, если

$$l = \{t(3,-2,6) \mid t \in \mathbb{R}\}; \quad \Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z - 1 = 0\}.$$

Задача 3. Подпространство $U \subset \mathbb{R}^4$ задано следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

Напишите систему уравнений, задающую ортогональное дополнение к U.

Задача 4. Определите, является ли следующая квадратичная форма в $\mathbb{R}^3$ положительно определённой:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} x_i x_j.$$

Задача 5. Путём экспериментов Буратино обнаружил зависимость между количеством посаженных монет n и урожаем $f(n)$. А именно, $f(1) = 4$, $f(2) = 11$, $f(3) = 13$, $f(4) = 18$. Найдите такую линейную функцию $l(x) = ax + b$, что сумма квадратов

$$\sum_{i=1}^{4} (f(i) - l(i))^2$$

минимальна.