Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 11. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определение 1. *Векторным произведением $[u, v]$ неколлинеарных векторов u и v в $\mathbb{R}^3$ называется такой вектор $[u, v] \in \mathbb{R}^3$, что*

(1) *$[u, v]$ ортогонален векторам u и v;*
(2) *длина вектора $[u, v]$ равна площади параллелограмма, натянутого на u и v;*
(3) *базис u, v, $[u, v]$ задаёт положительную ориентацию в $\mathbb{R}^3$.*

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нулю.

Задача 1. (а) Пусть (e_1, e_2, e_3) — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Вычислите векторные произведения $[e_1, e_2]$, $[e_2, e_1]$, $[e_1, e_3]$, $[e_3, e_1]$, $[e_2, e_3]$, $[e_3, e_2]$, $[e_1 + e_2, e_3]$ и $[e_1 + e_2 + e_3, e_3]$, пользуясь только определением.

(б) Проверьте, что векторное произведение антикоммутативно (то есть $[u, v] = -[v, u]$), ассоциативно относительно умножения на скаляр (то есть $\lambda[u, v] = [\lambda u, v]$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$) и дистрибутивно (то есть $[u + w, v] = [u, v] + [w, v]$).

(в) Пусть $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ (координаты взяты в стандартном базисе). Докажите, что

$$[u, v] = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)e_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)e_3$$

Задача 2. (а) Пусть $u, v \in \mathbb{R}^3$ — два неколлинеарных вектора. Покажите, что плоскость, натянутая на u и v, задаётся уравнением:

$$([u, v], z) = 0.$$

(б) Задайте уравнением плоскость, порождённую векторами $(-1, 1, -2)$ и $(-3, -4, 1)$.

Задача 3. (а) Пусть $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ — три вектора. Докажите, что объём параллелепипеда, натянутого на u, v и w равен $|([u, v], w)|$.

(б) Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $(3, 4, 6)$, $(1, 2, 3)$ и $(1, 1, 1)$.

Задача 4. Для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^3$ найдите ядро и образ оператора:

$$T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad T : u \mapsto [u, a].$$

Задача 5. Найдите ядро и образ оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше n.

Определение 2. *Векторное пространство W является прямой суммой векторных подпространств $U, V \subset W$, если каждый вектор $w \in W$ можно представить единственным образом в виде $w = u + v$, где $u \in U$, а $v \in V$.*

Задача 6. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V.

(а) Докажите, что если $T^2 = T$, то $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$, причём оператор T при ограничении на $\mathrm{Im}(T)$ действует как тождественный оператор.

(б) Докажите, что если $\dim V = n$, то

$$V \simeq \mathrm{Ker}(T^n) \oplus \mathrm{Im}(T^n).$$

Задача 7. Докажите, что для любых трёх векторов $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ выполнено:

(а) тождество BAC–CAB

$$[a, [b, c]] = b \cdot (a, c) - c \cdot (a, b);$$

(б) тождество Якоби

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 6. Срок сдачи 7 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, порождённая векторами $(-1, 1, -2)$ и $(-4, -3, -1)$. Найдите длину ортогональной проекции вектора $(1, 3, 1)$ на плоскость Π.

Задача 2. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы $(-1, 1, -2)$, $(-4, -3, -1)$ и $(1, 3, 1)$ в $\mathbb{R}^3$.

Задача 3. Пусть $a = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Найдите ядро и образ оператора:

$$T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad T : u \mapsto [u, a].$$

Задача 4. Пусть $u, v \in \mathbb{R}^3$ — два неколлинеарных вектора, лежащих в векторной плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Докажите, что ортогональная проекция вектора $w \in \mathbb{R}^3$ на плоскость Π равна

$$w - \frac{([u, v], w)}{|[u, v]|^2}[u, v].$$

Задача 5. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V. Докажите, что $T^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$.