Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 13. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Докажите, что для каждой пары подпространств U и V в векторном пространстве выполнено тождество, аналогичное формуле включений-исключений для множеств:

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

(б) Верно ли аналогичное тождество для трёх подпространств U, V, W?

Задача 2. Пусть $U = \langle (1,1,1), (2,3,4) \rangle \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость. Найдите размерности пересечения $U \cap V$ и суммы $U + V$ для следующих подпространств $V \subset \mathbb{R}^3$:

(а) $\langle (3,5,7) \rangle$; (б) $\langle (3,5,8) \rangle$; (в) $\langle (3,5,8), (13,21,34) \rangle$; (г) $\langle (3,5,7), (13,21,29) \rangle$.

Задача 3. Пусть A и B — две матрицы одинакового размера. Докажите, что

$$\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B).$$

Задача 4. Пусть $U \subset \mathbb{F}_2^4$ — плоскость в 4-хмерном пространстве над полем из двух элементов. Найдите количество таких плоскостей $V \subset \mathbb{F}_2^4$, что $U \cap V = \{0\}$.

Задача 5. В десяти копилках лежат 1, 2, 3,…, 10 монет. Разрешается добавлять по монете во все копилки, кроме одной. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, получить во всех копилках одинаковое количество монет?

Задача 6. На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

Задача 7. Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние=имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

Задача 8. (а) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если убрать условие, что вес коровы — целое число?

(в) Найдите ранг $(2n+1) \times (2n+1)$ матрицы, у которой на диагонали стоят нули, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо -1, причём сумма коэффициентов в каждой строке равна нулю.

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 7. Срок сдачи 12 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Найдите базис в подпространстве $U \subset \mathbb{R}^4$, порождённом векторами $(1, 2, -1, 0)$, $(4, 8, -4, -3)$, $(0, 1, 3, 4)$, $(2, 5, 1, 4)$.

Задача 2. Найдите размерность пересечения $U \cap V$, где U — подпространство из задачи 1, а $V \subset \mathbb{R}^4$ порождено векторами $(1, 1, 1, 1)$ и $(1, 2, 3, 4)$.

Задача 3. Найдите ранг $n \times n$-матрицы, у которой на диагонали стоят нули, а вне диагонали — единицы.

Задача 4. Пусть U, $V \subset \mathbb{F}_2^4$ — плоскости в 4-хмерном пространстве над полем из двух элементов. Найдите количество таких линейных операторов $T : \mathbb{F}_2^4 \mapsto \mathbb{F}_2^4$, что $\mathrm{Ker}\ T = U$, а $\mathrm{Im}\ T = V$, если известно, что $U \cap V = \{0\}$.

Задача 5. Имеются 13 монет. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на две чашки весов, по шесть на каждую, что наступит равновесие. Докажите, что все монеты весят одинаково.