Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 15. Алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Целые числа 1798, 2139, 3255, 4867 делятся на 31. Без всяких вычислений покажите, что определитель четвёртого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

также делится на 31.

Задача 2 (Определитель Вандермонда)**.** Докажите тождество:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Задача 3 (Разложение определителя по строке)**.** Пусть A — матрица размера $n \times n$. Обозначим через a_{ij} элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца, а через A_{ij} — матрицу размера $(n-1)\times(n-1)$, полученную из A вычёркиванием i-той строки и j-того столбца. Докажите формулу:

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^n a_{1n}\det(A_{1n}).$$

Задача 4. Через F_n обозначим n-ое число Фибоначчи (напомним, что $F_0 = F_1 = 1$, и $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ для всех натуральных n). Докажите тождество:

$$F_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 1. *Пусть A — матрица размера $m \times n$. Транспонированная матрица A^t — это матрица размера $n \times m$, полученная из A отражением относительно главной диагонали, то есть $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.*

Матрица называется симметрической, если $A = A^t$, и кососимметрической, если $A = -A^t$.

Задача 5. (а) Докажите, что $\det A = \det A^t$.

(б) Докажите, что параллелограмм, натянутый на векторы (a, b) и (c, d) имеет такую же площадь, как и параллелограмм, натянутый на векторы (a, c) и (b, d).

(в) Докажите, что $(AB)^t = B^t A^t$.

Задача 6. Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ система сравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 0 \pmod p \\ 2x + 3y + z \equiv 0 \pmod p \\ 3x + y + 2z \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?