Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 14. Геометрия

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Вычислите площадь параллелограмма на плоскости, натянутого на векторы $(13, 21)$ и $(21, 34)$.

(б) Вычислите объём параллелепипеда в трёхмерном пространстве, натянутого на векторы $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 9)$.

Задача 2. (а) Два параллелограмма Π_1 и Π_2 на плоскости имеют общее ребро Γ и лежат по одну сторону от прямой, содержащей Γ. Обозначим через Γ_1 и Γ_2, соответственно, их рёбра, параллельные Γ. Докажите, что Π_1 и Π_2 имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда Γ_1 и Γ_2 лежат на одной прямой.

(б) Два параллелепипеда Π_1 и Π_2 в трёхмерном пространстве имеют общую грань Γ и лежат по одну сторону от плоскости, содержащей Γ. Обозначим через Γ_1 и Γ_2, соответственно, их грани, параллельные Γ. Докажите, что Π_1 и Π_2 имеют одинаковый объём тогда и только тогда, когда Γ_1 и Γ_2 лежат в одной плоскости.

(в) Сформулируйте и докажите n-мерный аналог пунктов (а) и (б) для произвольного натурального n.

Задача 3 (Определитель оператора)**.** (а) Обозначим через $\det(v_1, \ldots, v_n)$ объём параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Докажите, что отношение объёмов

$$\det(T) := \frac{\det(T(v_1), \ldots, T(v_n))}{\det(v_1, \ldots, v_n)}$$

не зависит от выбора векторов $v_1, \ldots, v_n$, а завист только от T. Предложите способ вычисления $\det(T)$.

(б) Докажите, что у линейного оператора T есть обратный оператор T^{-1} (то есть композиция TT^{-1} — тождественное преобразование) тогда и только тогда, когда $\det(T) \neq 0$.

(в) Пусть $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — ещё один линейный оператор. Докажите, что $\det(ST) = \det(S)\det(T)$.

Задача 4. (а) Обозначим через $\mathbb{Z}^2$ решётку векторов с целыми координатами в $\mathbb{R}^2$. Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный оператор, такой что его матрица в стандартном базисе имеет целые коэффициенты. Докажите, что отображение $T|_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ является биекцией тогда и только тогда, когда $\det(T) = \pm 1$.

(б) На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 5. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело (например, параллелепипед). Обозначим через $k\Delta$ образ этого тела при гомотетии с коэффициентом $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что число целых точек в $k\Delta$ асимптотически равно k^n умножить на объём тела Δ, то есть:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|k\Delta \cap \mathbb{Z}^n|}{k^n \mathrm{vol}(\Delta)} = 1.$$

Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 8. Срок сдачи 19 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Вычислите объём параллелепипеда в $\mathbb{R}^4$, натянутого на векторы $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$, $(1,4,9,16)$, $(1,8,27,64)$.

Задача 2. Существует ли такой параллелограмм на вещественной плоскости, что его площадь равна единице, длины сторон и диагоналей больше 1000, и все вершины имеют целые координаты?

Задача 3. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Докажите, что определитель кососимметрической $n \times n$ матрицы равен нулю при нечётных n.

Задача 5. Вычислите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на диагонали стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а вне диагонали — единицы.