Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Листок 3 (бонусный).

факультет математики, НИУ ВШЭ

Для получения максимальной итоговой оценки (10) по курсу необязательно сдавать задачи из этого листка. Задачи листка дают дополнительный вклад в итоговую оценку, а также учитываются при сдаче досрочного экзамена.

Задача 1. В настольной игре Сет у каждой карточки есть четыре признака (цвет, форма, количество, заполнение), причём каждый признак принимает три значения. Три карточки образуют сет, если по каждому признаку они либо все одинаковы (например, одного цвета), либо все разные (например, никакие две не совпадают по цвету). Покажите, что можно отождествить карточки с точками в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над полем $\mathbb{F}^3$ из трёх элементов так, что каждые три карточки, составляющие сет, будут лежать на одной прямой.

Задача 2. Докажите, что композиция двух поворотов R_1 и R_2 в векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ также является поворотом. Как найти его ось и угол, если известны оси и углы поворотов R_1 и R_2?

Задача 3. Докажите, что квадратичную форму на конечномерном векторном пространстве над полем из трёх элементов можно привести заменой координат к виду:

$$x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 \pm x_k^2.$$

Задача 4. Обозначим через $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ пространство линейных операторов из $\mathbb{C}^n$ в себя (то есть *эндоморфизмов* пространства $\mathbb{C}^n$). Пусть непрерывное отображение $D : \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям $D(AB) = D(A)D(B)$ и $D(\lambda \cdot \mathrm{Id}) = \lambda^n$ для любых $A, B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажите, что тогда $D = \det$.

Задача 5. Найдите все конечные подгруппы в группе вращений векторного пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 6. Докажите, что определитель каждой целочисленной кососимметрической матрицы является полным квадратом.

Задача 7. Докажите, что $\sqrt{p}$ можно выразить через i и (комплексные) корни степени p из единицы, используя только арифметические операции.

Задача 8. Какие простые числа $p \in \mathbb{N}$ представляются в виде
(а) $x^2 + y^2$; (б) $x^2 + 5y^2$
для целых x и y?

Задача 9. Пусть $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ — попарно различные простые числа. Докажите, что $\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Задача 10. Пусть A, B, C и D — симметрические 3×3 матрицы с комплексными коэффициентами. Докажите, что найдутся такие комплексные числа α, β, γ и δ, не равные одновременно нулю, что матрица $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ имеет ранг не больше единицы.