Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Задачи для подготовки к экзамену.

факультет математики, НИУ ВШЭ

1. Алгоритм Евклида

Задача 1. Птицефабрика фасует яйца в коробки, рассчитанные либо на дюжину[1] яиц, либо на 25 яиц. Сможет ли птицефабрика отсчитать покупателю ровно 401 яйцо, используя только такие коробки? Предполагается, что в каждой коробке лежит ровно столько яиц, на сколько она рассчитана.

Задача 2. Найдите все решения в целых числах диофантова уравнения

$$16x + 27y = 214.$$

Задача 3. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^{30} - 1$ и $x^8 - 1$.

Задача 4 (Китайская теорема об остатках)**.** Найдите все решения системы сравнений

$$x \equiv 5 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 3 \pmod{15}.$$

Задача 5. Найдите натуральное число x, не превосходящее 120, такое что

$$x \equiv 1 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 5, \quad x \equiv 0 \pmod 3.$$

Задача 6. Найдите квадратный многочлен f с рациональными коэффициентами, такой что

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 20, \quad f(3) = 200.$$

Задача 7. Решите сравнение

$$100x \equiv 999 \pmod{1001}.$$

Задача 8. Решите уравнения в целых числах.

(а) $173x + 95y = 7$; (б) $57x + 102y = 3$; (в) $91x + 1001y = 6$.

Задача 9. Решите уравнения в натуральных числах.

(а) $173x + 95y = 20000$; (б) $57x + 102y = 10000$.

Задача 10. Найдите многочлен $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени не выше трёх, значения которого в точках 0, 1, 2 и 3 совпадают со значениями функции

$$\text{(а) } 2^x; \quad \text{(б) } \frac{1}{x+1}; \quad \text{(в) } \sin(\frac{\pi x}{2}).$$

Задача 11. Найдите такие многочлены f и g с рациональными коэффициентами, что

$$f(x)(x^3 - 2) + g(x)(2 + x + x^2) = 1,$$

и при этом степень f и g не больше 2.

Задача 12. Найдите такие рациональные числа a, b и c, что

$$\frac{1}{(2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}.$$

[1] Дюжина — это 12, гросс — это 12^2, а масса — это 12^3 (по-видимому, именно в этом смысле слово масса вошло в идиомы “масса народа” или “масса дел”). Раньше двенадцатеричная система счисления была довольно популярна.

2. Евклидовы пространства

Во всех задачах этого раздела дело происходит в евклидовом аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, и через $x_1,\ldots,\, x_n$ обозначены координаты в некотором ортонормированном базисе.

Задача 13. Докажите, что площадь $|\omega(u,v)|$ параллелограмма, натянутого на векторы u и v можно считать по формуле:

(а)

$$|\omega(u,v)| = \sqrt{\det\begin{pmatrix}(u,u) & (u,v)\\ (v,u) & (v,v)\end{pmatrix}}.$$

(б)

$$|\omega(u,v)| = |u||v||\sin\varphi|.$$

Задача 14. Докажите неравенство Коши–Буняковского–Шварца в $\mathbb{R}^n$:

$$|(u,v)| \leq |u||v|.$$

Задача 15. Найдите ортогональный базис в подпространстве:

(а) заданном уравнением $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

(б) порождённом векторами $(1,2,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$, $(3,2,8,-7)$;

(в) в ортогональном дополнении к предыдущему подпространству.

Задача 16. Рассмотрим стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ и ограничим его на гиперплоскость $U = \{x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Через $e_1,\ldots,\, e_n$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

(а) Найдите матрицу Грама скалярного произведения на U в базисе $\alpha_1 = e_1 - e_2,\ldots,$ $\alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$.

(б) Найдите ортонормальный базис в U, применив ортогонализацию Грама-Шмидта к базису $\alpha_1,\ldots,\, \alpha_{n-1}$.

Задача 17. Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ — гиперплоскость, натянутая на векторы $(1,2,3,1)$, $(1,2,3,2)$ и $(1,1,1,1)$.

(а) Найдите вектор единичной длины, перпендикулярный гиперплоскости Π.

(б) Найдите расстояние от точки $(6,3,6,5) \in \mathbb{R}^4$ до гиперплоскости Π.

(в) Найдите длину ортогональной проекции вектора $(6,3,6,5)$ на гиперплоскость Π.

Задача 18. Найдите расстояние от точки $p = (2,1,-3,4)$ до плоскости $\Pi = \{2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0\}$

Задача 19. Найдите косинус угла между вектором $(1,2,3,4)$ и подпространством $\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$.

Задача 20. Найдите расстояние между плоскостями $\Pi_1 = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 - 2 = 0,\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - 3 = 0,\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 - 3 = 0\}$; $\Pi_2 = (1,-2,5,8,2) + \langle(0,1,2,1,2),(2,1,2,-1,1)\rangle$.

Задача 21. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 22. Докажите, что поворот R в $\mathbb{R}^3$ на угол φ (против часовой стрелки) относительно оси, порождённой единичным вектором e, задаётся формулой:

$$R(v) = (1 - \cos\varphi)(v, e)e + \cos\varphi\ v + \sin\varphi\ [e, v].$$

Задача 23. Найдите матрицу поворота в $\mathbb{R}^3$:
(а) на угол $\frac{2\pi}{3}$ относительно прямой $\{x_1 = x_2 = x_3\}$;
(б) на угол φ относительно прямой $\{x_1 = x_2 = x_3\}$;
(в) на угол φ относительно прямой $\{x_1 = px_2 = qx_3\}$, где $p, q \neq 0$.

Задача 24 ($\star$)**.** Пусть A — матрица линейного оператора из $\mathbb{R}^3$ в себя в стандартном базисе. Известно, что $AA^t = I$ (через I обозначается единичная матрица), и $\det(A) = 1$. Покажите, что оператор является поворотом евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ (относительно стандартного скалярного произведения).

3. Арифметика

Задача 25. (а) Докажите, что число вида $4k+3$ не представляется в виде суммы двух полных квадратов ни для какого натурального k.

(б) Докажите, что если целые числа m и n представляются в виде суммы двух полных квадратов, то их произведение mn тоже представляется в виде суммы двух полных квадратов (и даже двумя способами).

Задача 26. Для каких остатков a по модулю p сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

разрешимо в целых числах, если p равно
(а) 5, (б) 13, (в) 23?

Задача 27. Докажите, что если p — нечётное простое число, то сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod p$$

разрешимо в целых числах ровно для половины всех ненулевых остатков a по модулю p.

Задача 28. Докажите, что сравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0 \mod p$$

имеет нетривиальное решение в целых числах (*тривиальное решение* — это решение $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \mod p$).

Задача 29. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \mod p$ не имеет решений в целых числах тогда и только тогда, когда $p \equiv 3 \mod 4$.

Задача 30. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 31. (а) Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то n обязательно является простым числом. (Простые числа вида $2^n - 1$ называются *простыми числами Мерсенна.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 32. (а) Докажите, что если число $2^n + 1$ простое, то n обязательно является степенью двойки, то есть, $n = 2^m$ для некоторого натурального m. (Простые числа вида $2^{2^m} + 1$ называются *простыми числами Ферма.*)

(б) Верно ли обратное?

Задача 33. Пусть p — простое число.

(а) Докажите “тождество ленивого школьника”:

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}.$$

(б) Докажите малую теорему Ферма: $n^p - n$ делится на p для любого натурального n.

(в) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

Задача 34. Существуют ли такие иррациональные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что α^β рационально?

Задача 35 ($\star$). Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ — различные простые числа. Докажите, что сравнение

$$p^x + q^y \equiv 1 \pmod{pq}$$

разрешимо в натуральных числах.

4. Комплексные числа

Задача 36. Представьте следующие комплексные числа в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{(а)}\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}; \quad \text{(б)}\ \sqrt{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}; \quad \text{(в)}\ \sqrt{1+i\sqrt{3}}.$$

Задача 37. Найдите все комплексные решения уравнения

(а)$z^3+3z^2+3z+3=0$; (б) $z^4+4=0$; (в) $(z+i)^4=(z-i)^4$; (г) $z^4+(z-4)^4=32$.

Задача 38. Найдите сумму квадратов длин всех диагоналей в правильном семиугольнике, вписанном в единичную окружность (сторона не считается диагональю).

Задача 39 ($\star$). Докажите, что число $\frac{2+i}{2-i}$ не является корнем n-ой степени из единицы ни для какого натурального n.

5. Кольца и поля

Задача 40. *Полем из трёх элементов* называется множество из трёх элементов (обозначим их через 0, 1 и 2) с операциями сложения и умножения, заданными следующими таблицами:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

,

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

.

Проверьте ассоциативность и дистрибутивность этих операций. Проверьте, что из каждого элемента можно вычесть любой другой элемент, и каждый элемент можно поделить на любой другой ненулевой элемент.

Задача 41. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков 0, 1, 2, 3, 4 при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$a + b = (a+b) \pmod{5},$$

$$ab = ab \pmod{5},$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{Z}$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 42. Пусть в поле $\mathbb{F}$ выполнено тождество $1+1=0$. Докажите или опровергните: уравнение $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$ будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого нечётного натурального n. (Предупреждение: тождество $1+1=0$ выполнено не только в поле из двух элементов, поэтому разбор примера $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ не является полным решением.)

Задача 43. Пусть в поле $\mathbb{F}$ тождество $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}=0$ не выполнено ни для какого натурального n. Докажите или опровергните: уравнение

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=a$$

будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого натурального n.

Задача 44 (Единственность нуля)**.** Докажите, что в кольце не может быть двух различных нулевых элементов, то есть элементов 0, для которых выполнено тождество $0+a=a$. Доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 45. Докажите, что в каждом кольце выполняются тождества:

$$\text{(а) } a\cdot 0=0; \quad \text{(б) } -a=(-1)\cdot a; \quad \text{(в) } (-a)\cdot b=(-ab).$$

Как и прежде, доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 46 (Делители нуля)**.** (а) Докажите, что если

$$ab=0$$

для двух элементов a и b поля, то либо $a=0$, либо $b=0$.

(б) Приведите пример кольца, в котором есть делители нуля, то есть, два ненулевых элемента a и b, таких что $ab=0$.

6. Группы движений и перестановок

Задача 47. (а) Разложите перестановку

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&4&5&6&7&8&1&2&6\end{pmatrix}$$

в произведение непересекающихся циклов.

(б) Найдите знак перестановки σ.

(в) Вычислите σ^{2018}.

Задача 48. (а) Опишите все перестановки в S_n, которые могут быть разложены в произведение (возможно пересекающихся) циклов длины три.

(б) При каких k в группе S_n найдётся перестановка с числом инверсий равным k?

Задача 49. (а) Опишите все повороты и отражения в группе симметрий правильного n-угольника при $n\geq 2$ (эта группа называется *группой диэдра* и обозначается D_n).

(б) Занумеруем вершины правильного n-угольника числами от 1 до n против часовой стрелки. Используя эту нумерацию, сопоставьте каждому движению из D_n перестановку из S_n. Каким перестановкам из S_n соответствуют повороты и отражения из пункта (а)? Чему равны знаки этих перестановок?

(в) При каких n отображение $D_n\to S_n$ из пункта (б) является взаимно-однозначным? Инъективным? Сюръективным?

Задача 50. (а) Докажите, что группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна S_4.

(б) Какие перестановки вершин тетраэдра можно получить с помощью вращений тетраэдра?

(в) Докажите, что группа вращений правильного тетраэдра изоморфна A_4.

Задача 51. (а) Какие перестановки пространственных диагоналей куба можно получить с помощью вращений куба?

(б) Докажите, что группа вращений куба изоморфна S_4.

Задача 52. (а) Придумайте такое сюръективное отображение $\varphi : S_4 \to S_3$, чтобы для любых двух перестановок выполнялось тождество $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$. (Иными словами, φ должно быть *гомоморфизмом*.)

(б) Найдите прообраз $\varphi^{-1}(\mathrm{id})$ единичной перестановки.

Задача 53. (а) Пусть G — конечная подгруппа группы движений плоскости. Докажите, что все элементы $g \in G$ имеют общую неподвижную точку x (то есть $g(x) = x$ для каждого $g \in G$).

(б) Классифицируйте все конечные подгруппы в группе движений плоскости.

Задача 54. Докажите изоморфизм групп

$$GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3.$$

Задача 55 ($\star$)**.** Существует ли сюръективный гомоморфизм $S_4 \to D_2$?

7. Многочлены

Задача 56. Примените решето Эратосфена, чтобы найти все неприводимые многочлены степени не выше четырёх с коэффициентами в поле из двух элементов.

Задача 57. (а) Докажите для любого заданного поля $\mathbb{F}$, что существует бесконечно много неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из $\mathbb{F}$.

(б) Классифицируйте все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. (Подсказка: используйте основную теорему алгебры.)

(в) Приведите пример неприводимого многочлена степени 5 над полем из двух элементов.

(г)* Докажите, что над полем из двух элементов существует неприводимый многочлен любой заданной степени.

Задача 58. Разложите на неприводимые множители в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен

$$x^4 + 4x^2 + x + 6.$$

8. Целые гауссовы числа

Задача 59. Разложите 30 на простые множители в кольце целых гауссовых чисел.

Задача 60. Какие из простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 останутся простыми в кольце $\mathbb{Z}[i]$?

Задача 61. Пусть γ — целое гауссово число. Введём отношение эквивалентности $\sim_\gamma$ на $\mathbb{Z}[i]$ по правилу: $z \sim_\gamma w$, если $z - w$ делится на γ.

(а) Нарисуйте по одному представителю для каждого класса эквивалентности при $\gamma = 2, 3$ и 5.

(б) Найдите число классов эквивалентности при $\gamma = 3 - 2i$.

9. Матрицы и системы линейных уравнений

Если не оговорено обратное, то здесь и далее все векторные пространства и уравнения рассматриваются над произвольным полем $\mathbb{F}$.

Задача 62. Вычислите
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}^n$$
для всех натуральных n.

Задача 63. Приведите к стандартному ступенчатому виду “таблицу умножения”, то есть, матрицу 10×10, у которой на (i, j)-том месте стоит ij.

Задача 64. Решите систему линейных уравнений
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача 65. (а) Докажите, что если $m \times n$-матрица A получается из матрицы A' элементарными преобразованиями строк, то системы из m однородных линейных уравнений на n неизвестных $AX = 0$ и $A'X = 0$ эквивалентны (то есть имеют одно и то же множество решений).

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для систем неоднородных линейных уравнений.

Задача 66. Найдите линейную зависимость между строками матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 67. Докажите, что если $m \times n$-матрица A' получается из матрицы A заменой i-той строки на сумму i-той и j-той строки, то $A' = (I_m + E_m^{ij})A$, где I_m — единичная $m \times m$-матрица, а E_m^{ij} — матрица того же размера с единственным ненулевым элементом (равным 1) на (i, j)-том месте.

Задача 68. Найдите матрицу обратную относительно умножения к матрице
$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 69. (а) При каком условии на коэффициенты 2×2-матрица имеет обратную?

(б) Тот же вопрос для 3×3-матрицы.

Задача 70. Пусть A — квадратная матрица. Докажите, что следующие три условия эквивалентны.

(1) Матрицу A можно перевести в единичную матрицу элементарными преобразованиями строк.

(2) Матрица A имеет обратную относительно умножения.

(3) Система линейных уравнений $AX = 0$ имеет только нулевое решение.

Задача 71. Вычислите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}.$$

Задача 72. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$ и $n \times k$, соответственно. Докажите неравенство на ранги:

$$\operatorname{rk} AB \leq \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}.$$

Задача 73. Пусть A и B — квадратные матрицы. Докажите неравенство на ранги:

$$\operatorname{rk}(A+B) \leq \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B).$$

Задача 74. Найдите число элементов в группе обратимых $n \times n$ матриц над полем из p элементов.

Задача 75. В десяти копилках лежат 1, 2, 3,..., 10 монет. Разрешается добавлять по монете во все копилки, кроме одной. Можно ли, повторяя эту процедуру несколько раз, получить во всех копилках одинаковое количество монет?

Задача 76. (а) На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1, \ldots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом из рёбер оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_6$, для которых задача имеет решения.

(б) На вершинах куба написаны числа $b_1, \ldots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число на каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на трёх сходящихся в этой вершине гранях? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_8$, для которых задача имеет решения.

Задача 77. Клетки прямоугольной таблицы заполнены числами так, что каждое число является средним арифметическим чисел в четырёх соседних клетках (соседние=имеющие общую сторону). Можно ли восстановить числа во внутренних клетках таблицы по числам в граничных клетках?

Задача 78 ($\star$). На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

Задача 79 ($\star$). (а) В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на два стада по 50 коров в каждом, так что суммарный вес коров первого стада равен суммарному весу коров другого стада. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если убрать условие, что вес коровы — целое число?

(в) Найдите ранг $(2n+1) \times (2n+1)$ матрицы, у которой на диагонали стоят нули, а все остальные коэффициенты равны либо 1, либо -1, причём сумма коэффициентов в каждой строке равна нулю.

10. Векторные пространства

Задача 80. Докажите, что любые 3 вектора в $\mathbb{R}^2$ линейно зависимы.

Задача 81. В n-мерном пространстве даны $n+2$ вектора $v_1, \ldots, v_{n+2}$. Докажите, что можно найти такие скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+2}$ не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+2} v_{n+2} = 0, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+2} = 0.$$

Задача 82. Какие из следующих подмножеств являются вещественными подпространствами в $\mathbb{R}[x]$?

(а) $\{f \mid f(1) = 2\}$ (б) $\{f \mid f(1) = 0\}$ (в) $\{f \mid f$ делится на $(x^2 + 1)\}$

Задача 83. Какие из следующих подмножеств являются комплексными подпространствами в $\mathbb{C}^2$?

(а) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ (б) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y\}$

Задача 84. Являются ли линейно зависимыми над $\mathbb{R}$ векторы

(а) $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$? (б) $(1, 2, 3, 5)$, $(2, 3, 5, 8)$, $(3, 4, 7, 11) \in \mathbb{R}^4$?

Задача 85. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в пространстве всех кососимметрических $n \times n$-матриц с вещественными коэффициентами.

Задача 86. Можно ли представить $\sqrt[3]{4}$ как линейную комбинацию $a + b\sqrt[3]{2}$, где a и b — рациональные числа?

Задача 87. Представляется ли многочлен $1+x+x^2+x^3$ в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами многочленов

(а) $x + 1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$? (б) $x - 1$, $(x - 1)^2$, $(x - 1)^3$?

Задача 88. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$.
(а) Являются ли функции x^3, $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V?
(б) Тот же вопрос для функций 1, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$.

Задача 89. Рассмотрим поле $\mathbb{R}$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$.
(а) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt{2}$, $1/(\sqrt{2} - 1)$?
(б) Выразите вектор $(1 + \sqrt{2})/(3 - 2\sqrt{2})$ как линейную комбинацию векторов 1 и $\sqrt{2}$.
(в) Являются ли линейно зависимыми векторы 1, $\sqrt[3]{2}$, $1/(\sqrt[3]{2} - 1)$?
(г) Можно ли выразить вектор $1/(\sqrt[3]{2} - 1)$ как линейную комбинацию векторов 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}^2$?

Задача 90. Чему равна размерность поля комплексных чисел, рассматриваемого как векторное пространство над полем
(а) рациональных чисел; (б) вещественных чисел; (в) комплексных чисел?

Задача 91. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ — минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Найдите размерность поля $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, если:
(а) $x^2 - 2$; (б) $x^3 - 2$; (в) $x^4 + 4$; (г) $x^4 + 1$; (д) $x^4 - 2$.

Задача 92. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Найдите число всех подпространств в координатной плоскости $\mathbb{F}_q^2$.

Задача 93 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a),\ f'(a), \ldots,\ f^{(n)}(a))$.

Задача 94 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0),\ f(a_1), \ldots,\ f(a_n))$.

Задача 95 ($\star$)**.** Пусть $U \subset \mathbb{F}_2^4$ — плоскость в 4-хмерном пространстве над полем из двух элементов. Найдите количество таких плоскостей $V \subset \mathbb{F}_2^4$, что $U \cap V = \{0\}$.

11. Линейные операторы

Задача 96. (а) Покажите, что векторы 1 и i образуют базис в поле комплексных чисел, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$.

(б) Выпишите матрицу оператора умножения на комплексное число $a+bi$ в базисе $\{1, i\}$.

Задача 97. Найдите два линейных оператора T и U на $\mathbb{R}^2$, такие что $TU = 0$, но $UT \neq 0$.

Задача 98. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(x + a).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 99. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Найдите базис в $\mathbb{Q}(\alpha)$ (рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{Q}$), если:

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$; (д) $\alpha = \pi$

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 100. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Выпишите матрицу оператора T_a в базисе $\{1, x, x^2\}$. (Ответ зависит от параметра a.)

Задача 101. Пусть A_1 и A_2 — две матрицы одного и того же оператора (в разных базисах) на n-мерном пространстве. Докажите, что существует обратимая $n \times n$-матрица P, такая что

$$A_2 = P A_1 P^{-1}.$$

Задача 102. Для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^3$ найдите ядро и образ оператора:

$$T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad T : u \mapsto [u, a].$$

Задача 103. Найдите ядро и образ оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше n.

Задача 104. Пусть $T : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V.

(а) Докажите, что если $T^2 = T$, то $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$, причём оператор T при ограничении на $\mathrm{Im}(T)$ действует как тождественный оператор.

(б) Докажите, что если $\dim V = n$, то

$$V \simeq \mathrm{Ker}(T^n) \oplus \mathrm{Im}(T^n).$$

Задача 105. Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле из q элементов, а $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ — линейное отображение. Докажите, что

$$|\mathrm{Im}\ T| \cdot |\mathrm{Ker}\ T| = q^n.$$

Задача 106. Найдите размерности ядра и образа линейного оператора $T : \mathbb{F}^5 \mapsto \mathbb{F}^4$, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 17 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

12. Определители

Задача 107. Целые числа 1798, 2139, 3255, 4867 делятся на 31. Без всяких вычислений покажите, что определитель четвёртого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

также делится на 31.

Задача 108. Покажите, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

является квадратом многочлена от a, b, c и d.

Задача 109. Найдите определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Задача 110. Найдите определитель матрицы размера $2n \times 2n$, у которой на главной диагонали стоят числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$, на побочной диагонали — числа $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$, а в остальных местах — нули. (Главная диагональ квадратной матрицы идёт из левого верхнего угла в правый нижний, а побочная — из левого нижнего угла в правый верхний.)

Задача 111. (а) Обозначим через $\mathbb{Z}^2$ решётку векторов с целыми координатами в $\mathbb{R}^2$. Пусть $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейный оператор, такой что его матрица в стандартном базисе имеет целые коэффициенты. Докажите, что отображение $T|_{\mathbb{Z}^2} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ является биекцией тогда и только тогда, когда $\det(T) = \pm 1$.

(б) На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 112. Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ система сравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z \equiv 0 \pmod p \\ 2x + 3y + z \equiv 0 \pmod p \\ 3x + y + 2z \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

имеет ненулевое решение?

Задача 113 ($\star$). Вычислите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на диагонали стоят числа $1 + \mu_1, \ldots, 1 + \mu_n$, а вне диагонали — единицы.

Задача 114 ($\star$). Найдите определитель $n \times n$ матрицы, у которой на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит $i + j$, если $i \neq j$ и $i + j + \mu_i$, если $i = j$.

13. Аффинные пространства

Задача 115. Найдите уравнение гиперплоскости в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$, проходящей через точки $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 4, 1, 2)$.

Задача 116. Опишите все случаи взаимного расположения плоскости и прямой в четырёхмерном аффинном пространстве.

Задача 117. Определите тип коники:

(а) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;
(б) $4x^2 + 6xy + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$;
(в) $-10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2 = 0$.

Задача 118. Определите тип квадрики $x^2 + 4xy + 2xz + z^2 + 3x + z - 6 = 0$.

Задача 119. В настольной игре Сет у каждой карточки есть четыре признака (цвет, форма, количество, заполнение), причём каждый признак принимает три значения. Три карточки образуют сет, если по каждому признаку они либо все одинаковы (например, одного цвета), либо все разные (например, никакие две не совпадают по цвету). Покажите, что можно отождествить карточки с точками в аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ над полем $\mathbb{F}^3$ из трёх элементов так, что каждые три карточки, составляющие сет, будут лежать на одной прямой.

Задача 120. Считая, что объём единичного целочисленного кубика равен единице, выразите объём n-мерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами в точках целочисленной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ через число целых точек, находящихся строго внутри самого Π, строго внутри его $(n-1)$-мерных граней, строго внутри $(n-2)$-мерных граней и т.д.

14. Билинейные и квадратичные формы

Задача 121. Матрица Грама билинейной формы $b(\cdot,\cdot)$ в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(а) Является ли форма b положительно определённой?

(б) Найдите базис, в котором матрица Грама формы b диагональна.

(в) Существует ли базис, в котором матрица Грама формы b диагональна, а на диагонали стоят числа 1, -1, -1?

Задача 122. Найдите размерность вещественного пространства симметрических $n \times n$ матриц с вещественными коэффициентами.

Задача 123. Пусть $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Докажите, что каждая билинейная форма представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной форм, причём такое представление единственно.

Задача 124. Пусть V пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A, B) = \frac{1}{2}\left(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)\right)$$

(такая форма называется *смешанным определителем*).

(а) Докажите, что форма $(\cdot,\cdot)$ билинейна и симметрична.

(б) Выпишите матрицу формы $(\cdot,\cdot)$ в стандартном базисе.

Задача 125. Найдите нормальный вид квадратичных форм:

(а) $\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$; (б) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

Задача 126. Докажите, что у положительно определенной квадратичной формы над $\mathbb{R}$ диагональные значения положительны. Верно ли обратное?

Задача 127. Докажите, что каждая квадратичная форма на $\mathbb{C}^n$ заменой координат приводится к сумме квадратов:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2,$$

причём количество квадратов k (называемое *рангом формы*) не зависит от выбора координат.