Алгебра и геометрия, осенний семестр 2018 г.

Семинар 21. Алгебра

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите все экстремумы (=максимумы и минимумы) квадратичной функции от двух переменных:

(а) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 1$;

(б) $f(x,y) = 4x^2 + 6xy + y^2 - 4x + 2y + 3$;

(в) $f(x,y) = -10x^2 + 6xy - y^2 + 4x + y + 2$.

Задача 2. Рассмотрим стандартное скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ и ограничим его на гиперплоскость $U = \{x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Через $e_1, \ldots, e_n$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

(а) Найдите матрицу Грама скалярного произведения на U в базисе $\alpha_1 = e_1 - e_2, \ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n$.

(б) Найдите ортонормальный базис в U, применив ортогонализацию Грама-Шмидта к базису $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Задача 3. Матрица Грама билинейной формы $b(\cdot,\cdot)$ в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(а) Является ли форма b положительно определённой?

(б) Найдите базис, в котором матрица Грама формы b диагональна.

(в) Существует ли базис, в котором матрица Грама формы b диагональна, а на диагонали стоят числа $1, -1, -1$?

Задача 4. Докажите, что у положительно определенной симметричной билинейной формы над $\mathbb{R}$ диагональные значения матрицы Грама положительны. Верно ли обратное?

Задача 5. Пусть V пространство вещественных 2×2 матриц. Определим на V форму

$$(A,B) = \frac{1}{2}\left(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)\right)$$

(такая форма называется *смешанным определителем*).

(а) Докажите, что форма $(\cdot,\cdot)$ билинейна и симметрична.

(б) Выпишите матрицу Грама формы $(\cdot,\cdot)$ в стандартном базисе.

Задача 6. Докажите, что поворот R в $\mathbb{R}^3$ на угол φ (против часовой стрелки) относительно оси, порождённой единичным вектором e, задаётся формулой:

$$R(v) = (1-\cos\varphi)(v,e)e + \cos\varphi\ v + \sin\varphi\ [e,v].$$

Задача 7. Пусть A — матрица линейного оператора из $\mathbb{R}^3$ в себя в стандартном базисе. Известно, что $AA^t = I$ (через I обозначается единичная матрица), и $\det(A) = 1$. Покажите, что оператор является поворотом евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ (относительно стандартного скалярного произведения).