

**Семинар 20. Геометрия**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Во всех задачах, кроме двух последних, дело происходит на евклидовой аффинной плоскости.

**Задача 1** (Неравенство треугольника). Докажите, что в треугольнике с длинами сторон  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполнены неравенства

$$|a - b| < c < a + b.$$

**Задача 2.** В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 3, 5, 7, 11, 17. Чему равна длина измеренной диагонали?

**Задача 3.** Две деревни расположены в точках  $A$  и  $B$ , а шоссе идёт вдоль прямой  $l$ . Жители деревень хотят построить на шоссе магазин так, чтобы минимизировать маршрут из одной деревни в другую через магазин. Найдите точку на шоссе, в которой им нужно построить магазин.

**Задача 4.** Внутри угла дана точка  $M$ . Найдите на сторонах угла точки  $A$  и  $B$  (по одной на каждой стороне), для которых периметр треугольника  $MA B$  наименьший.

**Задача 5.** Внутри равностороннего треугольника выбрана точка  $T$ . Докажите, что сумма расстояний от точки  $T$  до сторон треугольника не зависит от выбора точки.

**Задача 6** (Точка Торричелли). На плоскости даны три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , не лежащие на одной прямой. Для какой точки  $T$  плоскости сумма расстояний  $AT + BT + CT$  наименьшая?

**Задача 7.** Четыре города расположены в вершинах квадрата  $ABCD$ . Жители городов хотят построить аэропорт и ж/д вокзал в точках  $E$  и  $F$ , соответственно, и проложить пять дорог:  $AE$ ,  $BE$ ,  $CF$ ,  $DF$  и  $EF$ . Как нужно выбрать точки  $E$  и  $F$ , чтобы суммарная длина дорог была минимальна? Чему равна эта длина, если расстояние между  $A$  и  $B$  равно 1?

**Задача 8.** Фермер хочет огородить прямоугольный загон, так чтобы его площадь была равна  $400 \text{ м}^2$ . Найдите минимальный возможный периметр загона.

**Задача 9.** Фермер хочет огородить прямоугольный загон, так чтобы его площадь была равна  $200 \text{ м}^2$ , а одна из сторон шла вдоль прямолинейной реки (то есть, забор пойдёт только по трём другим сторонам). Найдите длины сторон загона, при которых суммарная длина забора минимальна.

**Задача 10.** На плоскости дано  $n$  красных и  $n$  синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести  $n$  отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

**Задача 11.** В прямоугольном параллелепипеде сумма длин рёбер равна 16, а сумма площадей граней равна 10. Найдите максимальный возможный объём параллелепипеда.

**Задача 12** (Прямая Сильвестра). (а) На аффинной плоскости  $\mathbb{R}^2$  дано конечное множество точек, не лежащих на одной прямой. Докажите, что найдётся прямая, проходящая ровно через две точки данного множества.

(б) Постройте контрпример к пункту (а) в аффинной плоскости  $\mathbb{C}^2$ .