

Задача 1 (Интерполяционная формула Лагранжа). Для данного набора попарно различных точек $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n , так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n))$.

Задача 2. Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на $\frac{9}{10}$ заполнена краской, причём в каждой банке — свой цвет, и все цвета разные. Можно ли, переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое), получить хотя бы в одной из банок смесь, в которой все 7 красок смешаны в равной пропорции? (Выливать краску куда-либо, кроме банок, нельзя.)

Задача 3 (Формула Тейлора). Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n , так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a))$. (Через $f^{(i)}$ обозначается i -тая производная многочлена f , то есть результат i -кратного применения к f оператора дифференцирования.)

Задача 4. Вокруг эллипсоида $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$ (где $a, b, c > 0$) описан прямоугольный параллелепипед. Найдите длину пространственной диагонали этого параллелепипеда. (Решение должно работать для всех возможных параллелепипедов, а не только для тех, чьи рёбра параллельны координатным осям.) Можно без доказательства пользоваться тем, что вектор нормали эллипсоида в точке (x_0, y_0, z_0) имеет координаты (ax_0, by_0, cz_0) .

Задача 5. Определим *кватернионы* \mathbb{H} как кольцо линейных операторов на плоскости \mathbb{C}^2 , заданных матрицами вида

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

(а) Определим длину $|(z, w)|$ вектора в \mathbb{C}^2 по формуле

$$|(z, w)| = \sqrt{z\bar{z} + w\bar{w}}.$$

Докажите, что кватернионы являются гомотетиями на \mathbb{C}^2 , то есть, увеличивают все длины векторов в одинаковое число раз (квадрат этого числа называется *нормой* кватерниона).

(б) Докажите, что в \mathbb{H} выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности умножения.

Задача 6. отождествим трёхмерное пространство \mathbb{R}^3 с множеством *мнимых кватернионов*, то есть, операторов из \mathbb{H} со следом нуль. Определим длину вектора $q \in \mathbb{R}^3$ как корень из нормы кватерниона q . Для каждого кватерниона q определим преобразование I_q пространства \mathbb{R}^3 по формуле

$$I_q : v \mapsto qvq^{-1}.$$

Проверьте корректность этого определения и докажите, что I_q является поворотом.

Задача 7. Определим *октавы* или *числа Кэли* \mathbb{O} как векторы (a, b) на (некоммутативной) плоскости \mathbb{H}^2 . Умножение на октаву (a, b) слева задаётся матрицей:

$$\begin{pmatrix} L_a & -R_b \\ R_b & L_{\bar{a}} \end{pmatrix},$$

где L_h, R_h , соответственно, обозначают операторы левого и правого умножения на кватернион h в \mathbb{H} . Докажите, что в \mathbb{O} выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности и ассоциативности умножения.