Критерии оценки экзамена
Геометрия и алгебра, осенний семестр 2018 г.
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Помимо перечисленных ниже причин снижения баллов за задачу, баллы также снижались за неверные утверждения и бессмысленные действия, даже если результат этих утверждений/действий прямо не влиял на решение задачи.

Задача 1. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два.
(а) Предъявите базис в V.
(б) Определим оператор $T : V \to V$ формулой:

$$(Tf)(x) = f(x+2).$$

Проверьте, что T является линейным оператором и выпишите его матрицу в базисе из пункта (а).

Критерии и статистика:

- $-$ Рассматриваются не все полиномиальные функции степени 2, а только функции специального вида (например, вида $ax^2 + bx + a$).
- $+/2$ Правильно сделан только пункт (а).
- $\pm$ Ошибки при раскрытии скобок в $(x+a)^2$ и другие мелкие ошибки при верном ходе решения[1]
- $+$ Всё верно.

Оценка	$-$	$+/2$	$\pm$	$+$
Количество	1	3	8	7

Задача 2. Найдите расстояние между плоскостью Π и прямой l в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3 = 0\};$$
$$l = (1, -2, 5, 8) + \langle(0, 1, 2, 1)\rangle.$$

Критерии и статистика:

- $-$ Неверный ответ или отсутствие ответа при неверном или непонятном ходе решения.

Оценка	$-$
Количество	2

Задача 3. Вычислите определитель 5×5-матрицы с элементами 1 на диагонали и 3 вне неё.

Критерии и статистика:

- $-$ Неверные ход решения и ответ[2].

---

[1] Коллекция реальных ошибок: $(x+2)^2 = x^2 + 8x + 4$, $(x-1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $(x+2)^2 = x^2 + 2x + 4$, $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 2$.

[2] Пример неверного хода решения: строки $R_1, R_2, \ldots, R_5$ исходной матрицы заменяются на $R_1 - R_2$, $R_2 - R_3$, $\ldots$, $R_5 - R_1$.

$\mp$ Верный ход решения, но неверный ответ из-за ошибки со знаками определителей или арифметической ошибки.

$+$ Всё верно.

Оценка	$-$	$\mp$	$+$
Количество	2	7	10

Задача 4. Найдите ядро и образ оператора в $\mathbb{R}^5$, который в некотором базисе записывается “таблицей умножения”, то есть матрицей 5×5, у которой на (i, j)-том месте стоит ij.

Критерии и статистика:

$\mp$ Верно найден ранг матрицы, но больше существенных продвижений нет.

$+/2$ Верно найдены только ядро, только образ или только размерности ядра и образа[3].

$+$ Приводится явное описание и ядра, и образа в исходных координатах.

Оценка	$\mp$	$+/2$	$+$
Количество	5	8	3

Задача 5. В вершинах квадрата написаны числа $b_1,\dots,\ b_4$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на рёбра так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на двух сходящихся в этой вершине рёбрах? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1,\dots,\ b_4$, для которых задача имеет решения.

Критерии и статистика:

$-$ Неверный ответ при неверном ходе решения.

$\pm$ Верно найдены условия, но не найдены решения.

$+$ Верно найдены условия и решения.

Оценка	$-$	$\pm$	$+$
Количество	1	5	8

Задача 6. Квадратичная форма в стандартном базисе в $\mathbb{R}^4$ имеет матрицу с элементами 2 на диагонали и 1 вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому базису?

Критерии и статистика:

$-$ Некорректные действия с матрицей квадратичной формы[4] или преобразования, не упрощающие форму.

$\mp$ Есть небольшие продвижения в преобразовании формы к более простому виду.

Оценка	$-$	$\mp$
Количество	6	3

[3] Сюда же подпадают решения, в которых ядро и образ описаны в новых координатах, связь которых с исходными не объясняется.

[4] Например, матрица перестаёт быть симметричной.

Задача 7. Найдите количество элементов в группе $G = GL_2(\mathbb{F}_3)$, где $\mathbb{F}_3$ — поле из трёх элементов.

Критерии и статистика:

$-$ Неверные ответ и ход решения.
$\mp$ Неверный ответ при верном ходе решения.
$+$ Всё верно.

Оценка	$-$	$\mp$	$+$
Количество	1	2	4

Задача 8. В городе n жителей и m клубов. Известно, что в каждом клубе нечётное число членов. При этом у каждой пары клубов чётное число общих членов (в том числе, может не быть общих членов). Докажите, что $m \leq n$.

Критерии и статистика:

$-$ Разбор частных случаев.
$\mp$ Замечена связь с линейной независимостью векторов в $\mathbb{F}_2^n$ (вариант I) или с количеством подмножеств в множестве из n элементов (вариант II), но продвижения в доказательстве незначительны.
$+$ Есть полное доказательство.

Оценка	$-$	$\mp$	$+$
Количество	2	2	1