Семинар 1.

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.
факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два.

(а) Предъявите базис в V.

(б) Определим оператор $T : V \to V$ формулой:

$$(Tf)(x) = f(x + 2).$$

Проверьте, что T является линейным оператором и выпишите его матрицу в базисе из пункта (а).

Задача 2. Найдите расстояние между плоскостью Π и прямой l в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, если

$$\Pi = \{x_1 + x_3 + x_4 - 2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3 = 0\};$$
$$l = (1, -2, 5, 8) + \langle(0, 1, 2, 1)\rangle.$$

Задача 3. Вычислите определитель 5×5-матрицы с элементами 1 на диагонали и 3 вне неё.

Задача 4. Найдите ядро и образ оператора в $\mathbb{R}^5$, который в некотором базисе записывается "таблицей умножения", то есть матрицей 5×5, у которой на (i, j)-том месте стоит ij.

Задача 5. В вершинах квадрата написаны числа $b_1, \ldots, b_4$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на рёбра так, чтобы число в каждой из вершин оказалось равно сумме чисел, написанных на двух сходящихся в этой вершине рёбрах? Опишите все решения этой задачи для всех $b_1, \ldots, b_4$, для которых задача имеет решения.

Задача 6. Квадратичная форма в стандартном базисе в $\mathbb{R}^4$ имеет матрицу с элементами 2 на диагонали и 1 вне неё. К какому наиболее простому виду можно её привести, перейдя к другому базису?

Задача 7. (а) Найдите количество элементов в группе $G = GL_2(\mathbb{F}_3)$, где $\mathbb{F}_3$ — поле из трёх элементов.

(б) Найдите количество элементов в группе $G = GL_3(\mathbb{F}_2)$, где $\mathbb{F}_2$ — поле из двух элементов.

Задача 8. В городе n жителей и m клубов.

(а) Известно, что в каждом клубе чётное число членов. При этом у каждой пары клубов чётное число общих членов (в том числе, может не быть общих членов). Докажите, что если n чётно, то выполнено неравенство:

$$m \leq 2^{\frac{n}{2}}.$$

(б) Известно, что в каждом клубе нечётное число членов. При этом у каждой пары клубов чётное число общих членов (в том числе, может не быть общих членов). Докажите, что $m \leq n$.