Семинар 2.

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Рассмотрим оператор T на $\mathbb{R}^2$, заданный в стандартном базисе матрицей:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нарисуйте векторы $T^n(v)$ для $n = 1, \ldots, 5$ и $v = (1, 0)$, $(1, -1)$.

Задача 2. Пусть оператор $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задан матрицей:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Найдите явно линейную зависимость между векторами v, $T(v)$, $T^2(v)$, где

$$\text{(а)}\ v = (1, 0); \quad \text{(б)}\ v = (0, 1); \quad \text{(в)}\ v = (1, 1).$$

Задача 3. (а) Докажите, что каждая 2×2-матрица A с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$, удовлетворяет квадратному уравнению:

$$A^2 + pA + qI$$

для некоторых $p, q \in \mathbb{F}$. (Через I обозначается единичная 2×2 матрица.) Выразите p и q через коэффициенты матрицы.

(б) Докажите, что каждая $n \times n$-матрица удовлетворяет полиномиальному уравнению степени не выше n.

Задача 4. Вычислите A^{2021}, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e & \pi & \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & e^{\pi} \\ 0 & 0 & i & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Задача 5 ($*$)**.** Найдите явную формулу, выражающую n-ое число Фибоначчи f_n через n. Напомним, что $f_0 = f_1 = 1$, а остальные числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ при } n \geq 2.$$

Задача 6 ($*$)**.** Может ли вещественная 3×3 матрица A удовлетворять уравнению:

$$(A^2 + I)^{2018} = 0?$$

(Через I обозначается единичная 3×3 матрица.)

Задача 7 ($*$)**.** Рациональный кузнечик прыгает по рациональным точкам прямой. Перед очередным прыжком кузнечик выбирает натуральное число n. Далее, если находится он в точке $\frac{p}{q}$, то прыгает в точку $\frac{p+nq}{q+np}$. Изначально кузнечик находится в точке 2011. Может ли он попасть в точку 2?