**Семинар 3.**

Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Рассмотрим оператор $T$ на координатной плоскости над полем $\mathbb{F}$, заданный в стандартном базисе матрицей:

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите все собственные числа и собственные векторы оператора $T$ над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и над $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

**Задача 2.** (а) (а) Найдите явную формулу, выражающую через $n$ коэффициенты матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

(б) Найдите явную формулу, выражающую $n$-ое число Фибоначчи $f_n$ через $n$. Напомним, что $f_0 = f_1 = 1$, а остальные числа Фибоначчи определяются рекуррентной формулой:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ при } n \geq 2.$$

**Определение 1.** *След* $\mathrm{tr}(T)$ *линейного оператора* $T : V \to V$ *на конечномерном векторном пространстве* $V$ *— это сумма диагональных элементов матрицы оператора* $T$ *в каком-нибудь базисе.*

**Задача 3.** (а) Проверьте корректность (=независимость от выбора базиса) определения следа линейного оператора.

(б) Докажите, что характеристический многочлен $\chi_T(t)$ оператора $T$ на плоскости равен:

$$t^2 - \mathrm{tr}(T)t + \det(T).$$

(в) Докажите, что каждый оператор $T$ на плоскости удовлетворяет тождеству Гамильтона-Кэли:

$$\chi_T(T) = 0.$$

**Задача 4.** Пусть $V$ — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Определим оператор $T : V \to V$ формулой:

$$(Tf)(x) = f(x+2).$$

Диагонализуем ли оператор $T$?

**Задача 5.** Может ли вещественная $3 \times 3$ матрица $A$ удовлетворять уравнению:

$$(A^2 + I)^{2018} = 0?$$

**Задача 6.** Рекуррентная последовательность задана формулой:

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n; \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Найдите явную формулу, выражающую $a_n$ через $n$.

**Задача 7** $(*)$**.** Дана $3 \times 3$-матрица $A$, и известно что

$$\mathrm{tr}(A) = 6, \quad \mathrm{tr}(A^2) = 6, \quad \mathrm{tr}(A^3) = 6.$$

Найдите коэффициенты характеристического многочлена матрицы $A$.