Семинар 4.
Геометрия и алгебра, весенний семестр 2018 г.
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Существуют ли две квадратные матрицы A и B, для которых выполнено тождество:
$$AB - BA = I?$$
(б) Докажите, что для любых двух квадратных матриц выполнено тождество:
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$
(в) Докажите, что характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ матрицы A размера $n \times n$ имеет вид:
$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n),$$
где $a_1 = \mathrm{tr}(A)$, а $a_n = \det(A)$.
(г)* Найдите явную формулу, выражающую коэффициенты $a_2, \ldots, a_{n-1}$ характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ через коэффициенты матрицы A.

Задача 2. (а) Докажите, что собственные значения вещественной симметрической матрицы размера 2×2 вещественны.
(б) Докажите, что вещественная матрица нечетного размера имеет вещественный собственный вектор, а четного — не обязательно.

Задача 3. Докажите, что две $n \times n$ матрицы A и B являются матрицами (в каких-то базисах) одного и того же оператора $T : V \to V$ на n-мерном пространстве V тогда и только тогда, когда A и B *подобны*, то есть существует такая обратимая матрица P, что $A = PBP^{-1}$.

Задача 4. Операторы на $\mathbb{R}^3$ заданы в стандартном базисе матрицами:
$$\text{(а)} \begin{pmatrix} 10 & 16 & 11 \\ -4 & -6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{(в)} \begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Какие из этих операторов диагонализуемы?

Задача 5. (а) Верно ли, что если оператор T на конечномерном векторном пространстве имеет два линейно независимых собственных вектора с собственным значением λ, то λ — кратный корень характеристического многочлена оператора T?
(б) Верно ли обратное?

Задача 6. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $T : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ на пространстве многочленов, если T переводит многочлен $f(x)$ в многочлен:
(а) $f'(x)$; (б) $xf'(x)$; (в) $(x+1)f'(x)$; (г) $f(x+1) - f(x)$.

Задача 7. Докажите, что если все собственные числа оператора T равны нулю, то оператор T *нильпотентный*, то есть $T^k = 0$ для некоторого натурального k.

Задача 8. Для вещественной 2×2-матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найдите собственные числа и собственные значения оператора M_A на пространстве 2×2-матриц, действующего по формуле
$$M_A : X \mapsto AX.$$

Алгебра и геометрия, весенний семестр 2018 г.

Домашнее задание 2. Срок сдачи 28 января.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в LaTeX.

Задача 1. Диагонализуется ли оператор над $\mathbb{R}$, заданный матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}?$$

Задача 2. Характеристический многочлен оператора равен $(\lambda - a)^2$. Докажите, что в некотором базисе этот оператор записывается одной из двух матриц:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Оператор на $\mathbb{R}^3$ в некотором базисе задаётся матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Представьте этот оператор верхнетреугольной матрицей в подходящем базисе.

Задача 4. Для комплексной 2×2-матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ определим оператор M_A на пространстве комплексных 2×2-матриц формулой

$$M_A : X \mapsto AX.$$

Найдите базис, в котором оператор M_A диагонализуется.

Задача 5. Пусть N — нильпотентный оператор на n-мерном векторном пространстве (то есть $N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$). Докажите, что $N^n = 0$.